DS 2 : 20 octobre 2021

▶ **Exercice 1** 1. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 16x^3 - 13x^2 - 4x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc e^u l'est également est $(e^u)' = u' \times e^u$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) = (48x^2 - 26x - 4)e^{16x^3-13x^2-4x+1}$$

2. Pour tout réel x, $e^{16x^3-13x^2-4x+1} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $48x^2 - 26x - 4$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-26)^2 - 4 \times 48 \times (-4) = 1444 > 0$. Ainsi, le polynôme $48x^2 - 26x - 4$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-(-26) - \sqrt{1444}}{2 \times 48} = -\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-26) + \sqrt{1444}}{2 \times 48} = \frac{2}{3}$$

On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-1/8$		$2/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. La tangente à la courbe de f à l'abscisse 1 a pour équation

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Or, $f'(1) = 18$ et $f(0) = 1$. Ainsi, cette tangente a pour équation $y = 18(x-1)+1$, c'est-à-dire $y = 18x - 17$

▶ **Exercice 2**

Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$.

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-n} - 1) = -1$.
   En appliquant la règle des signes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Les règles de calcul sur les limites donnent une forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour tout entier naturel non nul n,

$$v_n = \frac{n^3 \times \left(\dfrac{2}{n^2} - 3\right)}{n^3 \times \left(2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{n^3}\right)} = \frac{\dfrac{2}{n^2} - 3}{2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{n^3}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{n^2} - 3\right) = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{n^3}\right) = 2$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\dfrac{3}{2}$

3. Les règles de calcul sur les limites donnent une forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour tout entier naturel non nul n,

$$w_n = \frac{n^4 \times \left(1 + \dfrac{1}{n^{11}}\right)}{n^5 \times \left(1 - \dfrac{1}{n^5}\right)} = \frac{1 + \dfrac{1}{n^{11}}}{n \times \left(1 - \dfrac{1}{n^5}\right)}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^{11}}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^5}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

► Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$$

1. $u_1 = \dfrac{3-2}{2 \times 3 + 5} = \dfrac{1}{11}$
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{2x+5}$
   (a) f est définie pour tout réel x tel que $2x + 5 \neq 0$, c'est-à-dire pour x différent de $-\dfrac{5}{2}$.
   (b) Pour tout réel $x \neq -\dfrac{5}{2}$, on pose $u(x) = x - 2$ et $v(x) = 2x + 5$. u et v sont dérivables sur $\left]-\infty; -\dfrac{5}{2}\right[$ et $\left]-\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$. De plus, v ne s'annule pas sur ces intervalles. Ainsi, f est également dérivable sur ces intervalles et pour tout réel $x \neq -\dfrac{5}{2}$,
   $$f'(x) = \frac{1 \times (2x+5) - (x-2) \times 2}{(2x+5)^2} = \frac{2x + 5 - 2x + 4}{(2x+5)^2} = \frac{9}{(2x+5)^2}$$
   Attention, l'oubli de parenthèses est dangereux pour la santé.
   (c) Pour tout réel $x \neq -\dfrac{5}{2}$, $(2x+5)^2 > 0$, car c'est un carré. Ainsi, pour tout réel $x \neq -\dfrac{5}{2}$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{5}{2}\right[$ et $\left]-\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: "$u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -1$".
   - **Initialisation :** $u_0 = 3$ et $u_1 = \dfrac{1}{11}$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant -1$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -1$.
     Or, la fonction f est croissante sur $[-1; +\infty[$. On peut donc appliquer f à cette inégalité sans en changer le sens. On a donc $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f(-1)$.
     Or, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(-1) = \dfrac{-1-2}{2 \times (-1) + 5} = \dfrac{-3}{3} = -1$.
     Ainsi, $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant -1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion :** $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: "$u_n = \dfrac{9-8n}{3+8n}$".
   - **Initialisation :** $\dfrac{9-8\times 0}{3+8\times 0} = \dfrac{9}{3} = 3 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{9-8n}{3+8n}$. On cherche à établir que

   $$u_{n+1} = \frac{9-8(n+1)}{3+8(n+1)} = \frac{9-8n-8}{3+8n+8} = \frac{1-8n}{11+8n}$$

   Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$. Ainsi,

   $$u_{n+1} = \frac{\dfrac{9-8n}{3+8n} - 2}{2\times\dfrac{9-8n}{3+8n} + 5} = \frac{\dfrac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n}}{\dfrac{2(9-8n)+5(3+8n)}{3+8n}}$$

   Ainsi,

   $$u_{n+1} = \frac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n} \times \frac{2(9-8n)+5(3+8n)}{3+8n} = \frac{9-8n-2(3+8n)}{2(9-8n)+5(3+8n)}$$

   et donc

   $$u_{n+1} = \frac{9-8n-6-16n}{18-16n+15+40n} = \frac{3-24n}{33+24n}$$

   En factorisant au numérateur et au dénominateur par 3, on obtient finalement,

   $$u_{n+1} = \frac{3(1-8n)}{3(11+8n)} = \frac{1-8n}{11+8n}$$

   qui est bien le résultat voulu. $P(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion :** $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
5. Pour tout entier naturel non nul n,

   $$u_n = \frac{9-8n}{3+8n} = \frac{n\left(\dfrac{9}{n} - 8\right)}{n\left(\dfrac{3}{n} + 8\right)} = \frac{\dfrac{9}{n} - 8}{\dfrac{3}{n} + 8}$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{n} - 8\right) = -8$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{n} + 8\right) = 8$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-8}{8} = -1$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$u_n \leqslant -0.99 \Leftrightarrow \frac{9-8n}{3+8n} \leqslant -0.99$$

Puisque n est positif, $3+8n$ l'est aussi. Ainsi,

$$u_n \leqslant -0.99 \Leftrightarrow 9-8n \leqslant -0.99(3+8n) \Leftrightarrow 9-8n \leqslant -2.97-7.92n$$

Ainsi,

$$u_n \leqslant -0.99 \leqslant -8n+7.92n \leqslant -2.97-9 \leqslant -0.08n \leqslant -11.97 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{11.97}{0.08}$$

attention à ne pas oublier de changer le sens en divisant par -0.08, qui est négatif...
Or, $\frac{11.97}{0.08} = 149.625$. Ainsi, à partir du rang 150, on a $u_n \leqslant -0.99$.