DM03 : Suites et dérivation

► Exercice 1

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = e^{16x^3 - 13x^2 - 4x + 1}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 1.

► Exercice 2

Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$.

$$u_n = \frac{n^2 + 2}{e^{-n} - 1} \qquad v_n = \frac{2n - 3n^3}{2n^3 + n^2 - 4} \qquad w_n = \frac{n^4 + \frac{1}{n^7}}{n^5 - 1}$$

► Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$$

1. Calculer u_1.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{2x+5}$
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition et montrer que pour tout réel x dans ce domaine,
   $$f'(x) = \frac{9}{(2x+5)^2}$$
   (c) Que peut-on en déduire sur les variations de la fonction f ?
3. En remarquant que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et en utilisant le résultat de la question précédente, montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante et minorée par -1.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{9 - 8n}{3 + 8n}$.
5. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Déterminer la valeur de n à partir de laquelle on a $u_n \leqslant -0.99$