DM4 : Suites

► Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 16}{u_n - 3}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 4$ et on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 4}$

1. Calculer v_0
2. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
3. En déduire une expression de v_n pour tout entier naturel n.
4. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 + \dfrac{1}{n+1}$.
5. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

► Exercice 2

Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des suites suivantes

$$u_n = \frac{1-n^3}{3-4n} \quad ; \quad v_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+7} \quad ; \quad w_n = \frac{\sqrt{n^4+n^2+1}}{1+2n^2}$$

► Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$f_1 : x \mapsto e^{1-x^2} \qquad f_2 : x \mapsto \sqrt{1+e^{2x}} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

DM4 : Suites

► Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 16}{u_n - 3}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 4$ et on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 4}$

1. On a $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 4} = \dfrac{1}{5-4} = 1$
2. Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 4} - \frac{1}{u_n - 4} = \frac{1}{\frac{5u_n-16}{u_n-3} - 4} - \frac{1}{u_n - 4}$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n-16}{u_n-3} - \frac{4(u_n-3)}{u_n-3}} - \frac{1}{u_n - 4} = \frac{1}{\frac{5u_n-16-4u_n+12}{u_n-3}} - \frac{1}{u_n - 4}$$

et donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 4} - \frac{1}{u_n - 4} = \frac{u_n - 4}{u_n - 4} = 1$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison 1

3. Pour tout entier naturel n, $v_n = 1 + n$
4. Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 4}$ donc $\dfrac{1}{v_n} = u_n - 4$ et $u_n = 4 + \dfrac{1}{v_n} = 4 + \dfrac{1}{n+1}$.

5. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

► Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \frac{n^3}{n} \times \frac{\frac{1}{n^3}-1}{\frac{3}{n}-4} = n^2 \times \frac{\frac{1}{n^3}-1}{\frac{3}{n}-4}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}-1\right) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}-4\right) = -4$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Pour tout entier naturel n,

$$v_n = (\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+7})\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+7}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+7}}$$

D'où

$$v_n = \frac{2n+3-(2n+7)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+7}} = -\frac{4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+7}}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\sqrt{n^4+n^2+1} = \sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)} = \sqrt{n^4}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}$$

Ainsi,

$$w_n = \frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+2\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{\frac{1}{n^2}+2}$$

Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}$

► Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 1-x^2$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -2x$. Par ailleurs, $f_1 = e^u$. f_1 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1' = u'e^u$. Ainsi, pour tout réel x, $f_1'(x) = -2xe^{1-x^2}$.

Pour tout réel x, on pose $v(x) = 1+e^{2x}$. v est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 2e^{2x}$. Par ailleurs, $f_2 = \sqrt{u}$.

f_2 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_2' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Ainsi, pour tout réel x, $f_2'(x) = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 1-e^{-2x}$ et $v(x) = 1+e^{-2x}$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f_3 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_3' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{2e^{-2x}\times(1+e^{-2x})-(1-e^{-2x})\times(-2e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} \\ &= \frac{2e^{-2x}+2e^{-4x}+2e^{-2x}-2e^{-4x}}{(1+e^{-2x})^2} \\ &= \frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} \end{aligned}$$