DS01 : Récurrence, dérivation

► Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ »

- Initialisation : On a $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{2\times 0+1} = 1$. $P(0)$ est donc vraie.
- Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{1+2\times\frac{1}{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+1}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}} = \frac{1}{2n+1}\times\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2(n+1)+1}$$

  $P(n+1)$ est donc vraie.
- Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Exercice 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{x}{e^{0.5x-1}}$$

1. Pour tout réel x, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^{0.5x-1}$. u et v sont dérivable sur $\mathbb{R}$ et v ne s'annule pas. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1\times e^{0.5x-1} - x\times 0.5e^{0.5x-1}}{(e^{0.5x-1})^2} = \frac{(1-0.5x)e^{0.5x-1}}{(e^{0.5x-1})^2} = \frac{1-0.5x}{e^{0.5x-1}}$$

2. Pour tout réel x, $e^{0.5x-1} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $1-0.5x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	

On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

3. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ ».
   - Initialisation : On a $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{e^{-0.5}} \simeq 1.7$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$. $P(0)$ est donc vraie.
   - Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. En appliquant la fonction f qui est croissante sur $[0;2]$, on a $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.

Or, $f(0)=0$, $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(2)=2$. Ainsi, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$. $P(n+1)$ est donc vraie.

- Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

4. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

► Exercice 3

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x)=\sqrt{1+x^2}$

1. Pour tout réel x, $1+x^2>0$. g est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, g l'est donc également et pour tout réel x, $g'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

On considère désormais la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x)=(x-3)\sqrt{1+x^2}$$

2. Pour tout réel x,

$$f'(x)=1\times\sqrt{1+x^2}+(x-3)\times\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(x-3)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+x^2+x^2-3x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x^2-3x+1}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. Pour tout réel x, $\sqrt{1+x^2}>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $2x^2-3x+1$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-3)^2-4\times2\times1=1>0$. Ce polynôme admet donc deux racines, qui sont $\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=1$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0.5		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	-2.79	↘	-2.82	↗	

4. La tangente $\mathscr{T}$ a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=x-3$
5. On a $f(3)=0$ et, en remplaçant x par 3 dans l'équation de la tangente $\mathscr{T}$, on trouve bien $3-3=0$. La tangente $\mathscr{T}$ de la question précédente coupe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(3;0)$.
6. Dans un repère orthonormé, on trace l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que la tangente $\mathscr{T}$.