DS01 : Récurrence, dérivation

► Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

► Exercice 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{x}{e^{0.5x-1}}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1-0.5x}{e^{0.5x-1}}$.
2. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On y indiquera la valeur de l'extremum de la fonction f.

On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
4. D'après la question précédente, quel est le sens de variations de la suite (u_n) ?

► Exercice 3

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \sqrt{1+x^2}$

1. Justifier que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = (x-3)\sqrt{1+x^2}$$

On admet que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

2. Montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{2x^2-3x+1}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de la fonction f. On indiquera dans ce tableau la valeur prise par la fonction f en ses extremums au centième près.
4. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. On notera $\mathscr{T}$ cette tangente.
5. Montrer que la tangente $\mathscr{T}$ de la question précédente coupe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(3;0)$.
6. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que la tangente $\mathscr{T}$.