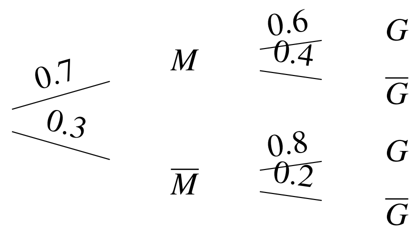
Bac blanc blanc

► **Exercice 1 — Métropole 2022**

1. (a) On a $p_{\overline{M}}(\overline{G}) = \dfrac{p(\overline{M}\cap\overline{G})}{p(\overline{M})}$. Or, 6% des clients ne font aucune visite. Ainsi, $p(\overline{M}\cap\overline{G}) = 0.06$.
   De plus, 70% des clients visitent le musée. Ainsi, $p(M) = 0.7$ et $p(\overline{M}) = 1-0.7 = 0.3$.
   Finalement, $p_{\overline{M}}(\overline{G}) = \dfrac{0.06}{0.3} = 0.2$.

   (b) L'arbre pondéré ci-dessous modélise la situation.



   (c) On a $p(\overline{M}\cap G) = p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(G) = 0.3\times 0.8 = 0.24$.

   (d) $(M,\overline{M})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $p(G) = p(\overline{M}\cap G) + p(M\cap G) = 0.24 + 0.7\times 0.6 = 0.66$.

2. On a $p_G(M) = \dfrac{p(G\cap M)}{p(G)} = \dfrac{0.42}{0.66} \simeq 0.64 > 0.5$. L'affirmation du responsable de l'hôtel est exacte.

3. (a) La loi de probabilité de T est la suivante

Événement	$M\cap G$	$\overline{M}\cap G$	$M\cap\overline{G}$	$\overline{M}\cap\overline{G}$
Dépense	17	5	12	0
$\mathbb{P}(X=k)$	0.42	0.24	0.28	0.06

   (b) On a $E(T) = 17\times 0.42 + 5\times 0.24 + 12\times 0.28 + 0\times 0.06 = 11.7$.

   (c) Chaque visiteur dépense en moyenne 11.7 euros. Il faut donc que le nombres x de visiteurs doit tel que $11.7x \geqslant 700$, soit $x \geqslant \dfrac{700}{11.7} \simeq 59.8$. Il faut donc atteindre au moins 60 visiteurs.

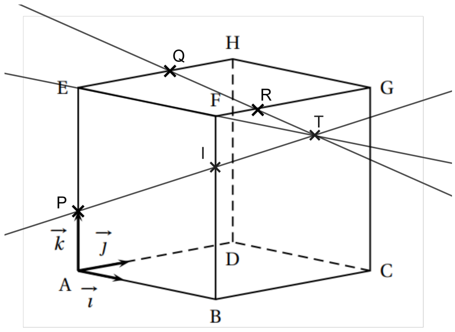
4. Notons x le prix de la visite de la grotte. La loi de T est alors la suivante.

Événement	$M\cap G$	$\overline{M}\cap G$	$M\cap\overline{G}$	$\overline{M}\cap\overline{G}$
Dépense	$12+x$	x	12	0
$\mathbb{P}(X=k)$	0.42	0.24	0.28	0.06

   Son espérance vaut alors $E(T) = (12+x)\times 0.42 + x\times 0.24 + 12\times 0.28 + 0\times 0.06 = 0.66x + 8.4$.
   Or, $8.4x + 0.66 \geqslant 15$ si et seulement si $x \geqslant 10$. Le prix de la visite de la grotte doit être fixée à 10 euros.

► **Exercice 2**

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté de longueur 3. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont $B(3\,;0\,;0)$, $D(0\,;3\,;0)$ et $E(0\,;0\,;3)$.



On considère les points $P(0\,;0\,;1)$, $Q(0\,;2\,;3)$ et $R(3\,;1\,;3)$

1. On a placé les points P, Q et R sur la figure.
2. On a $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{QR}$ ne sont pas colinéaires, les points P, Q et R ne sont donc pas alignés et définissent bien un plan.
4. Les points Q, E, R et F sont coplanaires (ils sont tous sur la face du dessus). Les droites (QR) et (EF) sont donc coplanaires. Ces droites n'étant pas parallèles, elles sont donc sécantes en un point T.
5. Les points P, T, B et F sont coplanaires (ils sont dans la prolongation de la face $(ABFE)$. Par ailleurs, les droites (PT) et (BF) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes en un point I.
6. La droite (BF) est sécante à la droite (PT). Or, le point T est aligné avec les points Q et R. La droite (PT) appartient donc au plan (PQR). La droite (BF) est donc sécante au plan (PQR) au point I.
7. On souhaite désormais déterminer les coordonnées du point I.
   (a) Le point I se trouve sur l'arête $[BF]$. Sa première coordonnée vaut donc 3, sa deuxième 0 et sa troisième coordonnée est entre 0 et 3 : il existe un réel z compris entre 0 et 3 tel que les coordonnées du point I soient $(3\,;0\,;z)$.
   (b) On a $\overrightarrow{QI}\begin{pmatrix}3\\-2\\z-3\end{pmatrix}$
   (c) Les points Q, P, R et I sont coplanaires, il en est donc de même pour les vecteurs $\overrightarrow{QI}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{QR}$. Ainsi, il existe des réels λ et μ tels que $\overrightarrow{QI}=\lambda\overrightarrow{QP}+\mu\overrightarrow{QR}$
   (d) On a $\overrightarrow{QI}=\lambda\overrightarrow{QP}+\mu\overrightarrow{QR}$ si et seulement si $\begin{cases}3=0\lambda+3\mu\\-2=-2\lambda-\mu\\z-3=-2\lambda\end{cases}$ La première ligne donne donc $\mu=1$. En remplaçant μ par 1 dans la deuxième ligne, on trouve $\lambda=\dfrac{1}{2}$. En remplaçant λ par $\dfrac{1}{2}$ dans la troisième ligne, on a finalement $z=2$. Les coordonnées du point I sont donc $(3;0;2)$.

► Exercice 3 — Amérique du Nord 2023

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{11}{u_n}\right)$.

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. On trouve $u_1 = \dfrac{18}{5}$ et $u_2 = \dfrac{599}{180}$
2. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{11}{x^2}\right) = \dfrac{x^2-11}{2x^2}$. Or, si $x \geqslant \sqrt{11}$, alors, par croissance de la fonction Carré sur $\mathbb{R}_+$, $x^2 \geqslant 11$ et donc $x^2 - 11 \geqslant 0$ d'où $f'(x) \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f est croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$
   - On a $u_0 = 5$ et $u_1 = \dfrac{18}{5}$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant \sqrt{11}$. $P(0)$ est vraie.
   - Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. Alors $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$. En appliquant la fonction f qui est croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$, on trouve $u_{n+2} \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
4. La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
5. On a $f(a) = a$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{11}{2a}$ soit $\dfrac{1}{2}a = \dfrac{11}{2a}$ et donc $a^2 = 11$ d'où $a = \pm\sqrt{11}$. La suite étant positive, on a $a = \sqrt{11}$.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée l_n et la longueur L_n.

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $L_{n+1} = \dfrac{L_n + l_n}{2}$.

1. (a) Le rectangle R_0 a pour aire 11 et pour longueur $L_0 = 5$. Ainsi, $5l_0 = 11$ donc $l_0 = \dfrac{11}{5} = 2.2$.

   (b) Le rectangle R_n a pour aire 11. Ainsi, $l_nL_n = 11$ et donc $l_n = \dfrac{11}{L_n}$.
2. Pour tout entier naturel n, $L_{n+1} = \dfrac{L_n + l_n}{2} = \dfrac{1}{2}\left(L_n + \dfrac{11}{L_n}\right)$. Cette suite correspond bien à celle de la partie A.
3. D'après la partie A, pour tout entier naturel n, $L_n \geqslant \sqrt{11}$. Par ailleurs, $l_n = \dfrac{11}{L_n}$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, on a donc $l_n \leqslant \dfrac{11}{\sqrt{11}}$, c'est-à-dire $l_n \leqslant \sqrt{11}$. Finalement, pour tout entier naturel n, on a $l_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.
4. Géométriquement, cela signifie que le rectangle R_n se rapproche de plus en plus d'un carré de côté de longueur $\sqrt{11}$.

5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```python
def heron(n):
    L = 5
    l = 2.2
    for i in range(n) :
      L = (L + l) / 2
      l = 11 / L
    return round(l,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python round(x,k) renvoie une version arrondie du nombre x avec k décimales.

(a) L'appel heron(3) renvoie les valeurs de l_3 et L_3 arrondis au millionième près, c'ets-à-dire 3.316606 et 3.316643

(b) Cela signifie que le nombre $\sqrt{11}$ est compris entre 3.316606 et 3.316643

► Exercice 4

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal

1. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
2. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.
3. Pour tout réel x, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$
4. L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y = \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

L'objectif de cette deuxième partie est d'étudier la position relative de la courbe C_f et de la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0. Pour cela, considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = 1-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)(1+e^{-x})$$

On admet que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

5. On a $g(0) = 0$
6. Pour tout réel x, $g'(x) = -\left(\dfrac{1}{4}(1+e^{-x})+\left(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}\right)\times(-e^{-x})\right) = -\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}e^{-x}+\dfrac{1}{4}xe^{-x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}$

   En simplifiant et factorisant par $\dfrac{1}{4}$, on a bien $g'(x) = \dfrac{1}{4}(e^{-x}+xe^{-x}-1)$.
7. Pour tout réel x, $g''(x) = \dfrac{1}{4}(-e^{-x}+e^{-x}+1\times(-e^{-x})) = -\dfrac{1}{4}xe^{-x}$
8. g'' est du signe contraire de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
g'		$\nearrow$	0	$\searrow$	

9. g' atteint son maximum en 0 et ce maximum vaut 0 : pour tout réel x, $g'(x) \leqslant 0$
10. g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Or, $g(0) = 0$. Ainsi, $g(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 0$.
11. On a donc $1 - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)(1 + e^{-x}) \geqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 0$.
    Or, $1 - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)(1 + e^{-x}) \geqslant 0$ si et seulement si $1 \geqslant \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)(1 + e^{-x})$ c'est-à-dire $\frac{1}{1 + e^{-x}} \geqslant \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$. On retrouve à gauche la fonction f et à droite sa tangente au point d'abscisse 0. La courbe de la fonction est donc au-dessus de la tangente si $x \leqslant 0$ et au-dessus si $x \geqslant 0$. En d'autres termes, cette tangente traverse la courbe de f au point d'abscisse 0.