BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Lycée Saint-Exupéry – Mantes-la-Jolie
27 janvier 2024
TMATHS3 et TMATHS4

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1 à 6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Tout autre document ou appareil électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

► Exercice 1 — 5 points

On considère la fonction f, définie pour tout réel x de l'intervalle $]-4;+\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{2x+9}{x+4}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition et on note f' sa fonction dérivée.

1. On a $f(x) = x$ si et seulement si $-\dfrac{2x+9}{x+4} = x$.

   Il est alors possible de procéder de plusieurs manières : on peut par exemple multiplier cette égalité par $x+4$ puis se ramener à une équation du second degré, ou bien soustraire x aux deux membres de cette équation.

   Il faut toutefois bien faire attention au signe " - " qui porte sur TOUTE la fraction.

   Ainsi, $-\dfrac{2x+9}{x+4} = \dfrac{-(2x+9)}{x+4} = \dfrac{-2x-9}{x+4}$. En revanche, $-\dfrac{2x+9}{x+4} \neq \dfrac{-2x+9}{x+4}$!

   On se retrouve alors d'une manière ou d'une autre à résoudre l'équation $x^2+6x+9=0$, soit $(x+3)^2 = 0$ et donc $x = -3$.

2. Là encore, il est critique de bien faire attention à la position du signe " - ". On ne peut ainsi pas utiliser la dérivée du quotient en utilisant $-2x+9$ comme numérateur... puisque justement, ce n'est pas le numérateur.

   On peut alors considérer $u : x \mapsto 2x+9$ et $v : x \mapsto x+4$. On a donc $f = -\dfrac{u}{v}$ (le signe " - " reste toujours devant la fraction) et donc $f' = -\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ (avec ce signe toujours devant la fraction).

   Ainsi, pour tout réel $x > -4$, $f'(x) = -\dfrac{2(x+4)-1(2x+9)}{(x+4)^2}$. Attention à ne pas oublier la parenthèse en soustrayant $2x+9$ dans le quotient !

   Finalement, $f'(x) = -\dfrac{2x+8-2x-9}{(x+4)^2} = -\dfrac{-1}{(x+4)^2} = \dfrac{1}{(x+4)^2}$.

3. On rappelle que le sens de variations d'une fonction dérivable est donné par le signe de sa dérivée. Or, pour tout réel $x > 4$, $(x+4)^2 > 0$ (rappelons qu'un carré est toujours positif...). Ainsi, f' est strictement positive, f est donc strictement croissante.

On considère désormais la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n) = -\dfrac{2u_n+9}{u_n+4} \end{cases}$$

On admet que la suite (u_n) est ainsi bien définie.

4. Encore une fois, la position du signe " - " a joué de nombreux tours pour ce calcul qui ne devrait être qu'une question de santé. On a ainsi $u_1 = -\dfrac{2u_0+9}{u_0+4} = -\dfrac{2\times 5+9}{9} = -\dfrac{19}{9}$.

5. Ne pas connaître les étapes du raisonnement par récurrence devient désormais inexcusable, mais rappelons-les tout de même : on **POSE** la propriété que l'on souhaite démontrer. On vérifie que cette propriété est vraie au rang 0, on vérifie qu'elle est héréditaire, puis on conclut.

Pour tout entier naturel n, on **POSE** donc la propriété $P(n)$: $-3 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

- On a $u_0 = 5$ et $u_1 = -\dfrac{19}{9}$. On a donc bien $-3 < u_1 \leqslant u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **SOIT n UN ENTIER NATUREL TEL QUE $P(n)$ EST VRAIE.** On a donc $-3 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
  Dans la définition de la suite, on a
  $$u_{n+1} = f(u_n)$$
  ce qui signifie qu'il faut
  UTILISER LA FONCTION f !
  Nous avons montré que la fonction était
  STRICTEMENT CROISSANTE.
  ON PEUT DONC APPLIQUER LA FONCTION f À L'INÉGALITÉ
  On a donc $f(-3) < f(u_{n+1} \leqslant f(u_n)$. Or, $f(-3) = -3$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$. On a donc $-3 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque : il se peut que les passages en grands caractères, majuscules et gras soient importants et pourtant bien trop absents des copies malgré les nombreuses répétitions de ces exercices. Notez par ailleurs que dans la mesure où une inégalité **stricte** est présente dans l'inégalité que l'on souhaite démontrer, il faut bien préciser que la fonction que l'on applique est **strictement** croissante.

6. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par -3. La suite (u_n) est donc convergente.

7. Puisque la fonction f est **continue** sur $]-3;+\infty[$, on a $f(\ell) = \ell$.
   Il n'est pas la peine de se relancer dans des calculs : vous avez déjà fait ceux-ci à la première question de l'exercice ! La valeur de la limite n'est autre que la solution que vous avez trouvé (à savoir, normalement, -3).

8. On considère le programme suivant, écrit en Python

```python
def seuil(s) :
    u = 5
    n = 0
    while u > s :
        u = - (2 * u + 9) / (u + 4)
        n = n + 1
    return n
```

   Il s'agit, comme le nom de la fonction l'indique de manière peu subtile, d'un algorithme de seuil. Le principe de cet algorithme est toujours le même : on cherche le rang de la suite à partir duquel les termes de la suite franchissent un certain seuil, ici noté s.
   L'instruction `seuil(-2.97)` renvoie donc le rang de la suite à partir duquel les termes de la suite (u_n), qui est strictement décroissante, sont inférieurs à -2.97. Cette instruction a renvoyé la valeur 34, ce qui signifie qu'à partir du rang 34, tous les termes de la suite sont inférieurs à -2.97.

9. On se propose d'utiliser une autre méthode pour déterminer la valeur de cette limite.
   On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel par $a_n = \dfrac{1}{u_n+3}$
   (a) Encore une fois, la mauvaise gestion du signe " - " devant la fraction aura coûté de précieux points, puisqu'il était impossible de trouver la suite arithmétique.
   Pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+3} = \frac{1}{-\frac{2u_n+9}{u_n+4}+3} = \frac{1}{\frac{-2u_n-9}{u_n+4}+\frac{3(u_n+4)}{u_n+4}} = \frac{1}{\frac{-2u_n-9+3u_n+12}{u_n+4}} = \frac{u_n+4}{u_n+3}$$

   Ainsi,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{u_n+4}{u_n+3} - \frac{1}{u_n+3} = \frac{u_n+3}{u_n+3} = 1$$

   La suite (a_n) est arithmétique de raison 1.
   (b) La suite (a_n) est arithmétique de raison 1. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n = a_0 + 1 \times n$. Or, $a_0 = \dfrac{1}{u_0+3} = \dfrac{1}{8}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{1}{8} + n$. Par ailleurs, puisque $a_n = \dfrac{1}{u_n+3}$, alors $u_n + 3 = \dfrac{1}{a_n}$ et donc $u_n = \dfrac{1}{a_n} - 3 = \dfrac{1}{\frac{1}{8}+n} - 3$.
   (c) On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{8}+n} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -3$.

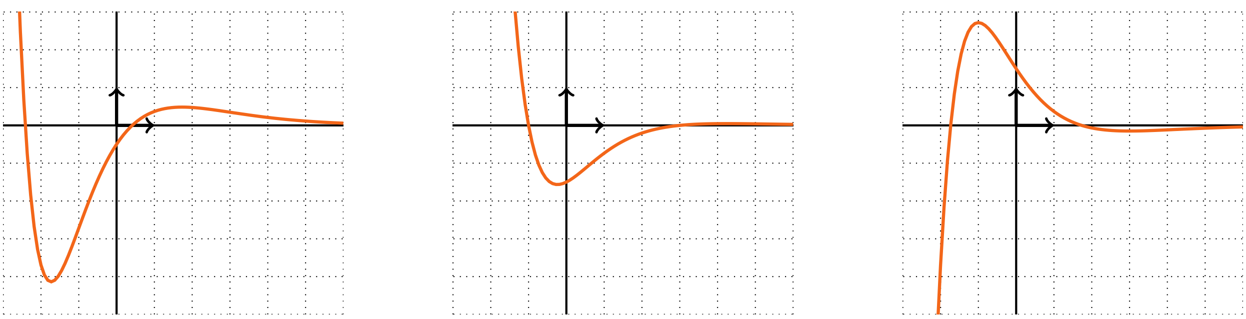
▶ Exercice 2 — 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. Les courbes représentatives de f, f' et f'' sont tracées ci-dessous dans un repère orthogonal.

Courbe 1 **Courbe 2** **Courbe 3**



La courbe 1 est celle d'une fonction décroissante jusqu'à environ -1.5 puis croissante. La courbe 3 est celle d'une fonction négative jusqu'en -1.5 environ puis positive.

La fonction 3 semble être la dérivée de la fonction 1. De plus, la fonction 3 est croissante jusqu'en -1 puis décroissante. La fonction 2 est positive jusqu'en -1 puis négative. La fonction 2 semble être la dérivée de ma fonction 3.

Finalement, la courbe 1 est celle de f, la courbe 3 est celle de f' et le courbe 2 est celle de f''.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}.$$

On notera C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On notera alors g' sa fonction dérivée et g'' sa fonction dérivée seconde.

1. Pour tout réel x, $g'(x) = (2x+2)e^{-x} + (x^2+2x-1) \times (-e^{-x}) = (2x+2-x^2-2x+1)e^{-x} = (3-x^2)e^{-x}$
2. L'équation de T, la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 est $y = g'(0)(x-0) + g(0)$. Or, $g'(0) = 3$ et $g(0) = -1$. La tangente T a pour équation $y = 3x - 1$.

On souhaite désormais déterminer s'il existe des tangentes à la courbe C_g qui soient parallèles à T. On rappelle que pour tout réel x,

$$g'(x) = (3-x^2)e^{-x}$$

3. Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Or, le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x vaut $g'(x)$. On cherche donc les réels x tels que $g'(x) = 3$.
4. (a) Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} (3-x^2) = -\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} g'(x) = -\infty$.
   (b) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} = 0$.
5. (a) Pour tout réel x, $g''(x) = -2xe^{-x} + (3-x^2) \times (-e^{-x}) = (x^2-2x-3)e^{-x}$.
   (b) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$. $g''(x)$ est donc du signe de $x^2 - 2x - 3$ qui est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 3.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	5.44	$\searrow$	-0.30	$\nearrow$	0

6. La fonction g' est continue sur $]-\infty; -1[$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} g'(x) = -\infty$ et $g'(-1) \simeq 5.44$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in]-\infty; -1[$ tel que $g'(c) = -3$. Par ailleurs, la fonction g' étant strictement croissante sur $]-\infty; -1[$, ce réel est unique. De même, il existe un unique réel dans l'intervalle $d \in [-1; 3]$ tel que $g'(d) = 3$ (ce réel n'est autre que 0.
   Enfin, l'équation $g'(x) = 3$ ne possède pas de solution sur $]3; +\infty[$. Ainsi, l'équation $g'(x) = 3$ possède également deux solutions sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que l'équation $g'(x) = 3$ possède exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.
7. On trouve $\alpha \simeq -1.53$.

► Exercice 3 — 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

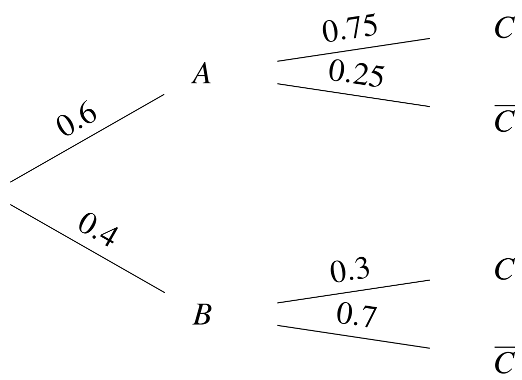
Lassé de son métier, un professeur de mathématiques a décidé de se reconvertir dans la boulangerie. Alice est une cliente régulière de cette boulangerie et vient souvent pour y acheter ses baguettes et son croissant. Le boulanger n'a pas pu s'empêcher de remarquer que le comportement d'Alice était le suivant :

- Dans 60% des cas, Alice achète une baguette lorsqu'elle vient à la boulangerie. Dans le cas contraire, elle en achète deux.
- Si Alice achète une seule baguette, il a 75% de chance qu'elle prenne également un croissant.
- Si Alice achète deux baguettes, elle ne prend un croissant que dans 30% des cas

Alice entre dans la boulangerie. On considère les événements suivants :

- A : « Alice achète une seule baguette » ;
- B : « Alice achète deux baguettes » ;
- C : « Alice achète un croissant ».

1. L'arbre pondéré suivant traduit la situation.



2. La probabilité qu'Alice achète deux baguettes et un croissant correspond à $\mathbb{P}(B \cap C)$. On a

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(C) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$$

3. Il est important pour cette question de préciser les hypothèses utilisées ! En l'occurrence, on précise que $\{A; B\}$ est un système complet d'événements. D'après la **formule des probabilités totales**, on a donc :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(C \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(C) + 0.12 = 0.6 \times 0.75 + 0.12 = 0.57$$

4. La probabilité que l'on recherche est $\mathbb{P}_C(B)$. Par définition, on a

$$\mathbb{P}_C(B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{0.12}{0.57} \simeq 0.211$$

Attention à bien arrondir à 10^{-3} près comme le demande l'énoncé !

5. Le boulanger vend ses baguettes à 1,05 euros et ses croissants à 0,95 euros. On note X la variable aléatoire qui donne le prix payé par Alice lors de sa visite chez le boulanger.
   (a) Le tableau suivant résume la loi de la variable aléatoire X.

k	1,05	2	2,10	3,05
$\mathbb{P}(X=k)$	0,15	0,45	0,28	0,12

   Il suffit de faire le lien entre le prix et les événements : une dépense de 2 euros correspond à une baguette et un croissant, etc. Pour vérifier, on n'oublie pas que la somme des probabilités doit forcément valoir 1.

   (b) L'espérance de X vaut $0.15\times 1.05+0.45\times 2+0.28\times 2.1+0.12\times 3.05=2.0115$. En moyenne, Alice dépense donc environ 2.01 euros en venant à la boulangerie.

Partie B

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Outre des baguettes croustillantes et de délicieux croissants, le boulanger vend également d'autres produits. On trouve ainsi 10 sortes de pâtisseries différentes, 4 types de cookies, 12 types de boissons ainsi que 15 sandwichs différents.

1. La vitrine du boulanger n'étant pas assez grande pour accueillir tous les types de sandwichs en même temps, le boulanger doit en choisir 8 qu'il pourra exposer et ainsi mettre en avant. L'ordre dans lequel il place les sandwichs dans la vitrine étant important, combien de choix s'offrent au boulanger pour réaliser sa présentation ?

   A. 259 459 200 **B.** 40 320 **C.** 16 777 216 **D.** 6 435

   L'ordre est important et il n'y a pas de répétitions : il s'agit d'un arrangement. Le boulanger a donc 15 choix pour le premier sandwich, 14 pour le deuxième, 13 pour le troisième etc. La nombre de possibilités vaut donc $15\times 14\times 13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 8$ soit 259 459 200.
   Réponse A

2. Une formule est composée d'un sandwich, d'une boisson et d'un dessert, ce-dernier pouvant être une pâtisserie ou un cookie. Combien de formules différentes peut-on ainsi constituer ?

   A. 41 **B.** 7 200 **C.** 2 520 **D.** 1 800

   Il y a 15 choix de sandwich, 12 choix de boissons et 14 choix de dessert. Le nombre de formules est donc de $15\times 12\times 14$ soit 2520. **Réponse C**

3. Un client un peu gourmand souhaite goûter à un échantillon des produits du boulanger. Il compte ainsi commander 3 gâteaux et 2 cookies, tous différents les uns des autres pour varier les plaisirs. Combien de choix s'offrent à lui pour réaliser sa commande ?

   A. 720 **B.** 2 002 **C.** 16 000 **D.** 126

   Le client choisit 3 pâtisseries parmi 10 et 2 cookies parmi 4. Le nombre de possibilités vaut donc $\binom{10}{3}\binom{4}{2}$, soit 720. **Réponse A.**

4. Face au succès des cookies, notre boulanger-mathématicien décide de lancer un service de cookie personnalisé. Chaque client peut alors choisir une base de cookie (nature ou chocolat) et les ingrédients à mettre dessus. 5 ingrédients sont disponibles et les clients peuvent choisir d'en mettre autant qu'ils veulent sur leur gâteau. Ils peuvent ainsi tout à fait choisir de n'en mettre aucun comme de mettre les 5 en même temps. Combien de recettes de cookies différentes est-il alors possible de créer ?

   A. 10 **B.** 240 **C.** 25 **D.** 64

   Il y a deux chois de bases. Pour choisir les ingrédients, on a alors 2^5 possibilités (pour chaque ingrédient, on a 2 choix : le prendre ou pas). Le nombre total de cookies que l'on peut former est donc 2×2^5 soit 64. **Reponse D.**

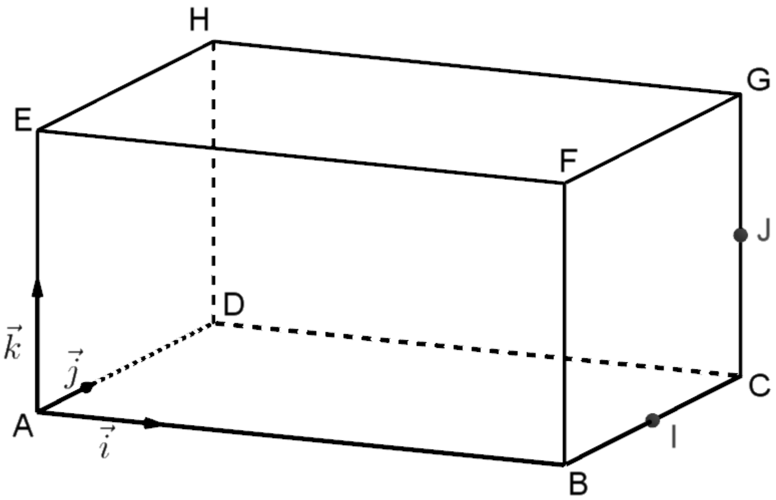
► Exercice 4

On considère un pavé droite $ABCDEFGH$ tel que $AB = 4$, $AD = 3$ et $AE = 2$. On note I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[CG]$.

On considère les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ définis par $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne ci-dessous les coordonnées de quelques points de la figure dans ce repère.

$A(0;0;0), B(4;0;0), C(4;2;0), G(4;3;2)$



1. On a $H(0;3;2)$ et $F(4;0;2)$.
2. I est le milieu de $[BC]$, ses coordonnées sont donc $\left(\frac{4+4}{2};\frac{0+3}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ soit $\left(4;\frac{3}{2};0\right)$.

   J est le milieu de $[CG]$. Ses coordonnées sont donc $\left(\frac{4+4}{2};\frac{3+3}{2};\frac{0+2}{2}\right)$ soit $(4;3;1)$.
3. On a $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}4\\-3/2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$.

4. Dans chacun des cas suivants, dire si les droites données sont sécantes, parallèles ou non coplanaires. Aucune justification n'est demandée.
   (a) Les droites (IJ) et (BG) sont parallèles
   (b) Les droites (EJ) et (AC) sont sécantes
   (c) Les droites (AI) et (FJ) sont non coplanaires

5. (a) Une représentation paramétrique de la droite (AJ) est $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$

   (b) On considère la droite (δ) de représentation paramétrique

$$(\delta) \quad : \quad \begin{cases} x = 8t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

En prenant $t = 0$, on trouve le point de coordonnées $(0;3;2)$, c'est-à-dire le point H. Par ailleurs, en prenant $t = 1/2$, on trouve le point de coordonnées $\left(4;\dfrac{3}{2};0\right)$ qui n'est autre que le point I. Puisque deux points suffisent à caractériser une droite, la droite (δ) est donc la droite (HI).

Il est également possible d'utiliser un vecteur directeur : le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (δ). Or, ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{HI}$.
Il faut toutefois utiliser **DEUX** informations : le vecteur directeur seul ne suffit pas. Ainsi, puisque la droite δ passe par H et est dirigée par $\overrightarrow{HI}$, cette droite n'est autre que la droite (HI) elle-même.

   (c) Cherchons t et t' tels que

$$(\delta) \quad : \quad \begin{cases} 4t = 8t' \\ 3t = 3 - 3t' \\ t = 2 - 4t' \end{cases}$$

La première ligne donne $t = 2t'$. On a donc

$$(\delta) \quad : \quad \begin{cases} t = 2t' \\ 6t' = 3 - 3t' \\ 2t' = 2 - 4t' \end{cases}$$

soit

$$(\delta) \quad : \quad \begin{cases} t = 2t' \\ t' = \frac{1}{3} \\ t' = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Finalement, on a $t = \dfrac{2}{3}$ et $t' = \frac{1}{3}$.
Remplaçons t par $\dfrac{1}{3}$ dans l'équation de (AJ) ; le point obtenu est le point $K\left(\dfrac{8}{3};2;\dfrac{2}{3}\right)$.

   (d) On a $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 8/3 \\ 2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{EC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{EK}$. Les points E, K et C sont alignés.