DM5 : Bonnes vacances !

► Exercice 1

Déterminer les limites suivantes

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{n^5-4n^3}{n^2-2n^4}=\frac{n^5}{n^4}\times\frac{1-\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-2}=n\times\frac{1-\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-2}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-2}=-\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^5-4n^3}{n^2-2n^4}=-\infty$.

Pour tout entier naturel n,

$$\sqrt{\frac{e^n}{1+e^n}}=\frac{\sqrt{e^n}}{\sqrt{e^n}\sqrt{\frac{1}{e^n}+1}}=\frac{1}{\sqrt{e^{-n}+1}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{e^n}{1+e^n}}=1$.

Pour tout entier naturel non nul n, $\sqrt{1+n^6}=\sqrt{n^6}\sqrt{\frac{1}{n^6}+1}=n^3\sqrt{\frac{1}{n^6}+1}$. Ainsi,

$$\frac{n^3+\sqrt{1+n^6}}{3n^3+2}=\frac{n^3+n^3\sqrt{\frac{1}{n^6}+1}}{3n^3+2}=\frac{n^3}{n^3}\times\frac{1+\sqrt{\frac{1}{n^6}+1}}{3+\frac{2}{n^3}}=\frac{1+\sqrt{\frac{1}{n^6}+1}}{3+\frac{2}{n^3}}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+\sqrt{1+n^6}}{3n^3+2}=\frac{2}{3}$.

► Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=3-\frac{9}{4u_n}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: " $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\frac{3}{2}$.
   - Initialisation : On a $u_0=2$ et $u_1=3-\frac{9}{8}=\frac{15}{8}$. On a bien $u_0\geqslant u_1\geqslant\frac{3}{2}$. $P(0)$ est donc vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \frac{3}{2}$.
  Ainsi, $4u_n \geqslant 4u_{n+1} \geqslant 6$ puis, par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, on obtient

$$\frac{1}{4u_n} \leqslant \frac{1}{4u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{6}$$

  On multiplie alors par -9 qui est négatif, pour obtenir $-\frac{9}{4u_n} \geqslant -\frac{9}{4u_{n+1}} \geqslant -\frac{3}{2}$.
  Finalement, on ajoute 3, et on a $3-\frac{9}{4u_n} \geqslant 3-\frac{9}{4u_{n+1}} \geqslant 3-\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant \frac{3}{2}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1}-v_n = \frac{2}{2u_{n+1}-3} - \frac{2}{2u_n-3} = \frac{2}{2\left(3-\frac{9}{4u_n}\right)-3} - \frac{2}{2u_n-3} = \frac{2}{6-\frac{9}{2u_n}-3} - \frac{2}{2u_n-3}$$

   Ainsi,

$$v_{n+1}-v_n = \frac{2}{\frac{6u_n-9}{2u_n}} - \frac{2}{2u_n-3} = \frac{4u_n}{6u_n-9} - \frac{6}{6u_n-9} = \frac{4u_n-6}{6u_n-9} = \frac{2(2u_n-3)}{3(2u_n-3)} = \frac{2}{3}$$

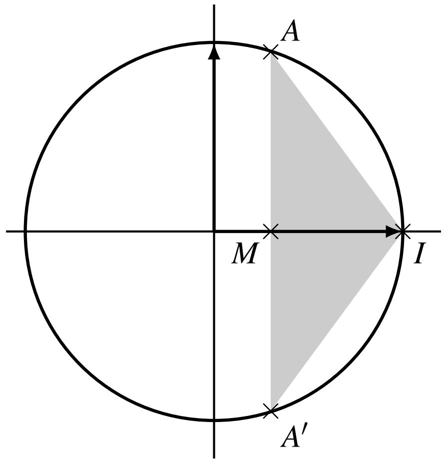
   Ma suite (v_n) est donc arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{2u_0-3} = 2$.

3. Pour tout entier naturel n, $v_n = 2+\frac{2n}{+3}$. Or, $v_n = \frac{2}{2u_n-3}$ Ainsi, $u_n = \frac{\frac{2}{v_n}+3}{2} = \frac{1}{v_n}+\frac{3}{2} = \frac{1}{2+\frac{2n}{3}}+\frac{3}{2}$.
4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

► Exercice 3

On se place dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé. On considère le cercle C de centre O et de rayon 1. On rappelle qu'une équation cartésienne de ce cercle est $x^2+y^2=1$. On note par ailleurs I le point de coordonnées $(1,0)$.

Soit $x \in [-1,1]$. On considère le point M de coordonnées $(x,0)$. La perpendiculaire à l'axe des abscisses coupe le cercle en deux points A et A', A étant le point d'ordonnée positive. L'objectif est de déterminer la valeur du réel x pour laquelle l'aire du triangle IAA' est maximale.



1. L'abscisse du point A est la même que le point M, c'est-à-dire x. Notons y l'ordonnée du point A. Puisque A est sur le cercle C, il en vient que $x^2+y^2=1$, c'est-à-dire $y^2=1-x^2$. L'ordonnée de A étant positive, on a donc $y=\sqrt{1-x^2}$. De même, l'ordonnée de A' vaut $-\sqrt{1-x^2}$. L'aire du triangle IAA' vaut donc $\dfrac{AA'\times IM}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{2\sqrt{1-x^2}(1-x)}{2}$ soit $(1-x)\sqrt{1-x^2}$.
2. On considère désormais la fonction $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$, définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
   (a) Notons $g : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. g est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Pour tout réel $x \in]-1,1[$,

   $$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

   Ainsi, pour tout réel $x \in]-1,1[$,

   $$f'(x) = -1 \times \sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

   En réduisant au même dénominateur (et en rappelant que $\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{1-x^2}=1-x^2$), on obtient

   $$f'(x) = \frac{-(1-x^2)-(1-x)x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

   (b) Pour tout réel $x \in]-1,1[$, $\sqrt{1-x^2}>0$. Par ailleurs, $2x^2-x-1$ est un polynôme du second degré dont les racines valent 1 et $-\dfrac{1}{2}$. On en déduit le signe de f' et les variations de f sur $[-1,1]$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On a $f(-1)=f(1)=0$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(c) L'aire du triangle IAA' est-elle maximale lorsque $x=-\frac{1}{2}$. L'aire vaut alors $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(d) Si $x=-\frac{1}{2}$, le point A a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et le point A' a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Rappelons que le point I a pour coordonnées $(1,0)$. On a alors

- $AA'=\sqrt{3}$
- $AI=\sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$
- $A'I=\sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$

Le triangle $AA'I$ est équilatéral. Il est aussi possible de raisonner en utilisant les angles pour qui se souvient de la trigonométrie de première. Les élèves qui suivent l'option Maths Expertes verront par ailleurs une autre méthode utilisant les complexes.