

DM 6 : Fonctions, géométrie

► Exercice 1

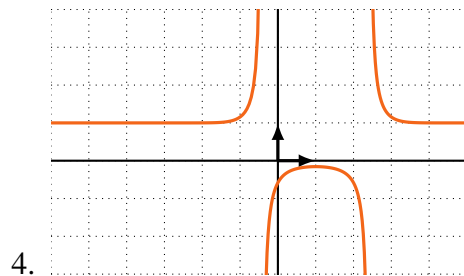
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 - e^{-x^2+2x+1}}$

- f est définie si et seulement si $1 - e^{-x^2+2x+1} \neq 0$, c'est-à-dire $-x^2 + 2x + 1 \neq 0$. La résolution de cette équation donne que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$.
- f est dérivable car c'est l'inverse d'une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur D . Pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{(-2x + 2)e^{-x^2+2x+1}}{(1 - e^{-x^2+2x+1})^2}$$

- Pour tout réel $x \in D$, $f'(x)$ est du signe de $-2x + 2$.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
f	↗		↗ ↘	↘	



► Exercice 2

Dans un repère quelconque $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(3; 5; -4)$ ainsi que la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d) : \begin{cases} x = 3 - 6t \\ y = 5 - 9t \\ z = -8 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Le point $C(3; 5; -8)$ appartient à (d) . En prenant $t = 1$, on trouve que le point $D(-3; -4; -3)$ appartient à la droite (d) . Le vecteur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (d).$$

- On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Les vecteurs \vec{AB} et \vec{u} ne sont pas colinéaires, les droites (AB) et (d) ne sont donc pas parallèles.

- On a $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Soit λ et μ deux réels. On a

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda - 4\mu \\ 3 = 3\lambda - 6\mu \\ -3 = -7\lambda - 2\mu \end{cases}$$

Les lignes 1 et 2 sont en fait les deux mêmes (la deuxième est égale à 1.5 fois la première). Il est donc possible de n'en garder qu'une seule sur les deux. Remplaçons alors la ligne 3 par $2L_3 - L_1 - 1$. On obtient

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda - 4\mu \\ -8 = -16\lambda \end{cases}$$

et donc

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 \times \frac{1}{2} - 4\mu \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement,

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

4. Les points A , B , C et D sont donc coplanaires. Les droites (AB) et (d) sont donc coplanaires. Puisqu'elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.

5. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

6. On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} 3 - 6t = 1 + 2t' \\ 5 - 9t = 2 + 3t' \\ -8 + 5t = -1 - 3t' \end{cases}$$

On remplaçant L_3 par $L_3 + L_2$, on obtient

$$\begin{cases} 3 - 6t = 1 + 2t' \\ 5 - 9t = 2 + 3t' \\ -3 - 4t = 1 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} 3 - 6t = 1 + 2t' \\ 5 - 9t = 2 + 3t' \\ t = -1 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} 3 - 6 = 1 + 2t' \\ 5 - 9 = 2 + 3t' \\ t = -1 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} t' = -2 \\ 5 - 9 = 2 + 3 \times (-2) \text{ (vrai)} \\ t = -1 \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $t = -1$ dans l'équation de (d) ou en prenant $t' = -2$ dans l'équation de (AB) , on trouve le point de coordonnées $(9, 14, -13)$: il s'agit du point d'intersection de ces deux droites.