DM10

► Exercice 1

On dispose des lettres du mot PYTHAGORE et on s'intéresse aux mots que l'on peut former à partir de ces lettres, sans se soucier du sens des mots. Il est par exemple possible de former les mots PATHOG ou AYGRHOPTE.

1. On a 9 choix pour la première lettre, 9 pour la deuxième et 9 pour la troisième, soit un total de $9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$ possibilités.
2. On a 9 choix pour la première, 8 pour la deuxième, 7 pour la troisième, 6 pour la quatrième soit $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ possibilités.
3. On a 4 choix pour la première lettre, 9 pour la deuxième, 9 pour la troisième et 9 pour la quatrième, soit $4 \times 9^3 = 2916$ possibilités.

On écrit les lettres du mot PYTHAGORE sur des cartes qui sont ensuite mélangées. Une personne tire une carte uniformément au hasard, note la lettre ainsi piochée puis remet la carte dans le tas. L'opération est répétée à cinq reprises, formant ainsi un mot de cinq lettres.

1. Le nombre de mots qu'il est possible de formé est de 9^5. Le nombre de mots de 5 lettres sans lettre en double vaut $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$. La probabilité recherchée est donc $\dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{9^5} = \dfrac{560}{2187}$.
2. On décompose les possibilités selon la position de la consonne
   - Si la consonne est en première position : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilités.
   - Si la consonne est en deuxième position : $4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilités.
   - Si la consonne est en troisième position : $4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 1$ possibilités.
   - Si la consonne est en quatrième position : $4 \times 3 \times 2 \times 5 \times 1$ possibilités.
   - Si la consonne est en dernière position : $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5$ possibilités.

   Il y a donc 600 possibilités au total. La probabilité recherchée vaut $\dfrac{600}{9^5} = \dfrac{200}{19683}$.

► Exercice 2

Sans idée d'exercice pour le devoir de mathématiques, M. Lapeyronnie décide de préparer les purées de la semaine pour son enfant. Celui-ci dispose de cinq légumes et de trois viandes pour les préparer. Il imagine alors un exercice de combinatoire à donner à ses élèves de terminale qui seront ravis d'en apprendre davantage sur la vie passionnante de leur professeur.

1. Il y a $\dbinom{5}{1}\dbinom{3}{1} = 15$ recettes de purées comportant une viande et un légume.
2. Il y a $\dbinom{5}{3}\dbinom{3}{1} = 30$ recettes de purées comportant une viande et 3 légumes.
3. Il y a $\dbinom{6}{1} + \dbinom{6}{2} = 21$ compotes différentes possibles. On choisit 1 OU 2 ingrédients, cela se traduit par une addition.

4. Le nombres de menus est de

$$\left(\binom{3}{0}+\binom{3}{1}\right)\times\left(\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}\right)\times\left(\binom{6}{1}+\binom{6}{2}\right)=2100$$

   (on traite d'abord la viande, puis les légumes, et enfin les fruits !)
5. Le nombre de menus possibles pour la semaine est donc de 2100^7, soit 180 108 854 100 000 000 000 000. Bon appétit !