Devoir surveillé 2

▶ Exercice 1 — 10 points

1. On a $u_1 = \dfrac{-u_0 - 1}{4u_0 + 3} = \dfrac{-2-1}{4\times 2+3} = -\dfrac{3}{11}$.
2. L'instruction terme(n) renvoie la valeur de u_n.

```python
def terme(n) :
  u = 2
  for i in range(n) :
    u = (-u-1)/(4*u+3)
  return u
```

3. La fonction f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. Par aillrus, pour tout réel $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{-1\times(4x+3) - (-x-1)\times 4}{(4x+3)^2} = \frac{-4x-3+4x+4}{(4x+3)^2} = \frac{1}{(4x+3)^2} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur I.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n > -0.5$ »
   - On a $u_0 = 2$ et $2 > -0.5$. $P(0)$ est donc vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n > -0.5$. Or, la fonction f étant strictement croissante sur I (et donc sur $[0.5;+\infty[$), on a alors $f(u_n) > f(0.5)$.
     Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(-0.5) = \dfrac{-(-0.5)-1}{4\times(-0.5)+3} = \dfrac{-0.5}{1} = -0.5$.
     Ainsi, $u_{n+1} > -0.5$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
5. On a $v_0 = \dfrac{1}{u_0+0.5} = \dfrac{1}{2.5} = 0.4$.
6. Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}+0.5} - \frac{1}{u_n+0.5} = \frac{1}{\dfrac{-u_n-1}{4u_n+3}+0.5} - \frac{1}{u_n+0.5}$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\dfrac{-u_n-1+0.5(4u_n+3)}{4u_n+3}} - \frac{1}{u_n+0.5} = \frac{4u_n+3}{u_n+0.5} - \frac{1}{u_n+0.5} = \frac{4u_n+2}{u_n+0.5}$$

Finalement,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4(u_n+0.5)}{u_n+0.5} = 4$$

7. La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 4 et de premier terme 0.4. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 0.4 + 4n$.

8. Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{u_n + 0.5}$.

   Ainsi, $\dfrac{1}{v_n} = u_n + 0.5$ et donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} - 0.5 = \dfrac{1}{0.4+4n} - 0.5$
9. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -0.5$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n < -0.499 \Leftrightarrow \dfrac{1}{0.4+4n} - 0.5 < -0.499 \Leftrightarrow \dfrac{1}{0.4+4n} < 0.001$.

    En appliquant la fonction inverse qui est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on a alors $u_n < -0.499 \Leftrightarrow 0.4+4n > 1000 \Leftrightarrow n > \dfrac{1000-0.4}{4}$. Or, $\dfrac{1000-0.4}{4} = 249.9$.

    L'entier recherché est donc 250.

► Exercice 2 — 4 points

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$u_n = \frac{n^2}{n} \times \frac{3+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-1} = n \times \frac{3+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\dfrac{2}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}-1\right) = -1$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4})} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}{n+2-(n+4)} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}{-2}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$w_n = \frac{\sqrt{n^2}\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{e^{-n}}{n}\right)} = \frac{n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{e^{-n}}{n}\right)} = \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{e^{-n}}{n}}$$

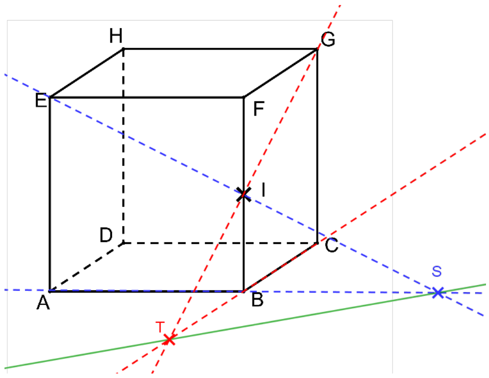
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{n^2}\right) = 2$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}} = \sqrt{2}$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{e^{-n}}{n}\right) = 1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \sqrt{2}$.

► Exercice 3 — 4 points

1. La droite (HD) n'est pas coplanaire à la droite (FD).
2. On a $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
3. On a $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont donc coplanaires.
4. Les droites (EI) et (AB) sont coplanaires puisque les points A, I , E et B sont coplanaires (ils appartiennent à la face avant du cube). De plus, les droites (EI) et (EB) ne sont pas parallèles. Ces deux droites sont donc sécantes en un point S.

5. La droite (GI) appartient au plan (EGI). La droite (BC) appartient au plan (ABD). Ces deux droites sont coplanaires non parallèles, elles sont donc sécantes en un point T. Ainsi, les points S et T appartiennent tous deux à l'intersection des plans (EGI) et (ABD). L'intersection de deux plans étant une droite, l'intersection cherchée ici est la droite (ST).



► Exercice 4 — 2 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{2x^2-8x+8}$.

f est l'exponentielle d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $f'(x) = (4x-8)e^{2x^2-8x+8}$. Or, pour tout réel x, $e^{2x^2-8x+8} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $(4x-8)$.

Par ailleurs, $f(2) = e^{2\times 2^2-8\times 2+8} = e^{8-16+8} = e^0 = 1$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	