Devoir surveillé 2

Nom :
Prénom :

► **Exercice 1 — 10 points**

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 1}{4u_n + 3}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer la valeur de u_1.
2. On considère la fonction **terme** ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python

```python
def terme(n) :
  u = ...
  for i in range(n) :
    u = ...
  return u
```

Compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction terme(n) renvoie la valeur de u_n.

On considère l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{4};+\infty\right[$ ainsi que la fonction f définie pour tout réel x dans I par

$$f(x) = \frac{-x-1}{4x+3}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur I.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > -0.5$

On considère alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 0.5}$.

5. Calculer v_0.
6. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 4$.
7. En déduire une expression de v_n pour tout entier naturel n.
8. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{0.4 + 4n} - 0.5$.
9. Quelle est la limite de la suite (u_n) en $+\infty$?
10. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < -0.499$.

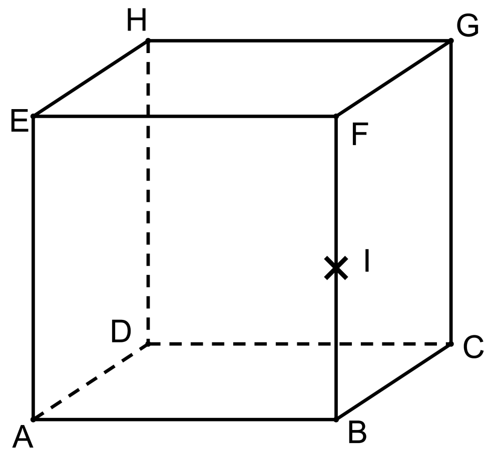
► Exercice 2 — 4 points

Déterminer les limites en $+\infty$ des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies comme suit pour tout entier naturel non nul n.

$$u_n = \frac{3n^2+2}{1-n} \qquad v_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4}} \qquad w_n = \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+e^{-n}}$$

► Exercice 3 — 4 points

On considère un cube $ABCDEFGH$ et le point I, milieu de $[BF]$.



1. Donner une droite qui n'est pas coplanaire à la droite (FC).
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
4. Justifier que les droites (EI) et (AB) sont sécantes et tracer leur point d'intersection sur la figure.
5. Construire, en justifiant la construction, l'intersection des plans (EGI) et (ABD).

► Exercice 4 — 2 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{2x^2-8x+8}$.
Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera la valeur de f en son extremum.