Devoir surveillé 3

► Exercice 1

Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et donc $3 \leqslant (4-(-1)^n) \leqslant 5$ puis $3n^2-6 \leqslant (4-(-1)^n)n^2-6 \leqslant 5n^2-6$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n^2-6)=+\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Pour tout entier naturel n,

$$v_n=\frac{3^n}{2^n}\times\frac{\frac{1}{3^n}-1}{1-\frac{5}{2^n}}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\times\frac{\frac{1}{3^n}-1}{1-\frac{5}{2^n}}$$

Or, puisque $3>1$, $2>1$ et $\dfrac{3}{2}>1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{3^n}-1}{1-\frac{5}{2^n}}=-1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$w_n=\frac{n}{n}\times\frac{1+\dfrac{\cos(n)}{n}}{1+\dfrac{\sin(n)}{n}}=\frac{1+\dfrac{\cos(n)}{n}}{1+\dfrac{\sin(n)}{n}}$$

Or, pour tout entier naturel non nul n, $-1\leqslant\cos(n)\leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{\cos(n)}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos(n)}{n}=0$.

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(n)}{n}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{\cos(n)}{n}}{1+\dfrac{\sin(n)}{n}}=1$.

► Exercice 2

Marie Sklodowska-Curie (1867–1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française. Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium. On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques. On admet que, au bout de 24 heures, 0,5% des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite (v_n) ; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques. On dispose de 2g de polonium, on a donc $2 \times 3 \times 10^{21}$ noyaux atomiques. Ainsi, $v_0 = 6 \times 10^{21}$
2. Diminuer une quantité de 0,5% revient à la multiplier par $1 - \dfrac{0,5}{100}$ soit 0,995. Par ailleurs, on ajoute 0,005 g de polonium, ce qui correspond à $0.005 \times 3 \times 10^{21}$ c'est-à-dire 0.015×10^{21} ou encore 1.5×10^{19} noyaux atomiques. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a
$$v_{n+1} = 0.995 v_n + 1,5 \times 10^{19}$$
3. La fonction v renvoie le terme de rang n de la suite (v_n).

```
def v(n) :
  v = 6 * 10 ** 21
  for i in range(n) :
    v = 0.995 * v + 1.5 * 10 ** 19
  return v
```

4. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$ ».
   - Initialisation : pour $n = 0$.
     On a $v_0 = 6 \times 10^{21}$ et $v_1 = 0.995 \times 6 \times 10^{21} + 10^{19} = 5.98 \times 10^{21}$.
     On a bien $0 \leqslant v_1 \leqslant v_0$.
   - Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. Ainsi, $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.
     En multipliant par 0.995 et en ajoutant 1.5×10^{19} à cette inégalité, on a donc
     $0 \leqslant 1.5 \times 10^{19} \leqslant 0.995 v_{n+1} + 1.5 \times 10^{19} \leqslant 0.995 v_n + 1.5 \times 10^{19}$ c'est-à-dire
     $0 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) D'après la question précédente, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.
5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$.

   (a) Pour tout entier naturel n,
   $$\begin{aligned} u_{n+1} = v_{n+1} - 3 \times 10^{21} &= 0.995 v_n + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21} \\ &= 0.995(u_n + 3 \times 10^{21}) + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21} \\ &= 0.995 u_n \end{aligned}$$
   La suite (u_n) est géométrique de raison 0,995.

   (b) On a $u_0 = 6 \times 10^{21} - 3 \times 10^{21} = 3 \times 10^{21}$.
   Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times 10^{21} \times 0.995^n$ et
   $$v_n = u_n + 3 \times 10^{21} = 3 \times 10^{21} \times 0.995^n + 3 \times 10^{21} = 3 \times 10^{21}(0,995^n + 1)$$

   (c) Puisque $-1 < 0.995 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0.995^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3 \times 10^{21}$.

► Exercice 3

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{j})$. On considère les points $A(5;3;1)$, $B(1;2;0)$, $C(1;1;-1)$ et $D(3;0;-2)$.

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-3\end{pmatrix}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

3. Soit λ et μ des réels.

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4=-4\lambda-2\mu\\-1=-2\lambda-3\mu\\-1=-2\lambda-3\mu\end{array}\right.$$

Les lignes 2 et 3 étant identiques, on peut en retirer une. Par ailleurs, en soustrayant 2 fois la deuxième ligne à la première, on a

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-2=4\mu\\-1=-2\lambda-3\mu\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu=-1/2\\-1=-2\lambda+3/2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu=-1/2\\\lambda=5/4\end{array}\right.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

4. On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas parallèles.

5. Les points A, B, C et D sont coplanaires. Les droites (AB) et (CD) sont donc coplanaires. Or, les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

6. On a $(AB)\quad:\quad\left\{\begin{array}{l}x=5-4t\\y=3-t\\z=1-t\end{array}\right.$ $,t\in\mathbb{R}$ et $(CD)\quad:\quad\left\{\begin{array}{l}x=1+2t'\\y=1-t'\\z=-1-t'\end{array}\right.$ $,t\in\mathbb{R}$

7. Cherchons t et t' tels que $\left\{\begin{array}{l}5-4t=1+2t'\\3-t=1-t'\\1-t=-1-t'\end{array}\right.$ On a

$$\left\{\begin{array}{l}5-4t=1+2t'\\3-t=1-t'\\1-t=-1-t'\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}5-4(t'+2)=1+2t'\\t=t'+2\\1-(t'+2)=-1-t'\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}5-4t'-8=1+2t'\\t=t'+2\\1-t'-2=-1-t'\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t'=-2/3\\t=-2/3+2=4/3\\t'=-2/3\end{array}\right.$$

Remplaçant t par $\dfrac{4}{3}$ dans l'équation de (AB), on obtient $\left\{\begin{array}{l}x=5-4\times\dfrac{4}{3}=-\dfrac{1}{3}\\y=3-\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}\\z=1-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

La point d'intersection des droites (AB) et (CD) a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

► Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- **Affirmation :** La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée : VRAI.

  En effet, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant 1$.
- **Affirmation :** Toute suite bornée est convergente : FAUX
  La suite $((-1)^n)$ est bornée par -1 et 1 mais n'admet pas de limite.
- **Affirmation :** Toute suite croissante tend vers $+\infty$. : FAUX
  La suite $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ est croissante mais ne tend pas vers $+\infty$ (elle tend en réalité vers 1).
- **Affirmation :** Toute suite croissante est minorée : VRAI
  Si une suite est croissante, alors tous ses termes sont supérieurs à son premier terme. Cette suite est donc minorée.
- **BONUS – Affirmation :** Toute suite convergente est bornée : VRAI
  Notons (u_n) cette suite et l sa limite. Par définition de la limite, il existe un entier N tel que, si $n \geqslant N$, alors $u_n \in [l-1 : l+1]$. A partir du rang N, la suite est donc bornée. Par ailleurs, avant le rang N, la suite ne compte qu'un nombre fini de termes (en particulier, il y en a un plus grand que tous les autres et un plus petit que tous les autres). La suite (u_n) est donc globalement bornée.