Devoir surveillé 3

► Exercice 1

Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$.

$$u_n = (4-(-1)^n)n^2 - 6 \qquad v_n = \frac{1-3^n}{2^n-5} \qquad w_n = \frac{n+\cos(n)}{n+\sin(n)}$$

► Exercice 2

Marie Sklodowska-Curie (1867–1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française. Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium. On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques. On admet que, au bout de 24 heures, 0,5% des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite (v_n) ; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. Justifier que $v_0 = 6\times 10^{21}$
2. Expliquer en utilisant les données de l'énoncé que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0.995 v_n + 1{,}5\times 10^{19}$$

3. On considère le programme suivant, écrit en Python

```
1 def v(n) :
2   v = 6 * 10 ** 21
3   for i in range(n) :
4     v = ...
5   return v
```

Compléter la ligne 4 de ce programme pour que la fonction v renvoie le terme de rang n de la suite (v_n).

4. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.
   (b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.
5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = v_n - 3\times 10^{21}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,995.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3\times 10^{21}(0{,}995^n + 1)$.
   (c) En déduire la limite de la suite (v_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 3

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{j})$. On considère les points $A(5;3;1)$, $B(1;2;0)$, $C(1;1;-1)$ et $D(3;0;-2)$.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.
3. Trouver deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD}$.
   Que peut-on en déduire sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$?
4. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.
5. Sans calcul supplémentaire, justifier que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
6. Donner une représentation paramétrique des droites (AB) et (CD).
7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

► Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- **Affirmation :** La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.
- **Affirmation :** Toute suite bornée est convergente.
- **Affirmation :** Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
- **Affirmation :** Toute suite croissante est minorée.
- **BONUS – Affirmation :** Toute suite convergente est bornée.