Devoir surveillé 4

▶ Exercice 1

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \to -\infty} e^{1+x-x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(2+\cos(x))e^x}{x} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{(2+\cos(x))e^x}{x}$$

▶ Exercice 2

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^x - x$.

1. Construire le tableau de variations de g.
2. En déduire que pour tout réel x, $e^x - x > 0$

On considère désormais la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x - x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

3. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f.
5. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

6. En déduire le tableau de variations de f. On inclura dans ce tableau les limites de f et la valeur exacte de son extremum.
7. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
8. Tracer, dans un repère orthonormé, l'allure de la courbe C_f ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.

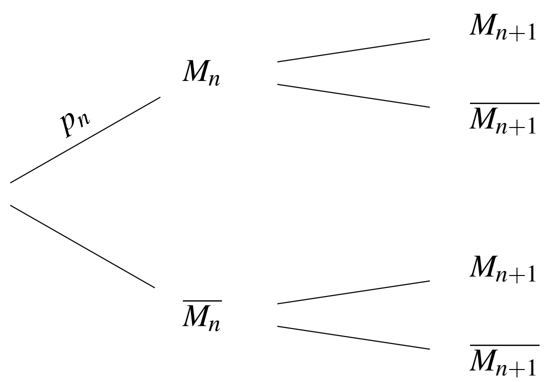
► Exercice 3

Outre la machine à café, la photocopieuse est la meilleure amie de tous les professeurs. Malheureusement, celle-ci est capricieuse et n'est pas toujours en état de fonctionner. Un professeur de mathématiques a constaté les faits suivants :

- Si la photocopieuse est en état de fonctionner un jour à 8h30, la probabilité qu'elle fonctionne également le lendemain à la même heure est de 0,6.
- Si la photocopieuse est en panne un jour à 8h30, la probabilité qu'elle soit toujours en panne le lendemain à la même heure est de 0,8.

Pour tout entier naturel n, on note M_n l'événement « la photocopieuse est en état de fonctionner à 8h30 n jours après la rentrée » et p_n la probabilité de cet événement. On supposera par ailleurs et par expérience que $p_0 = 0{,}7$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui traduit la situation.



2. Montrer que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}4p_n + 0{,}2$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant \dfrac{1}{3}$.
   (b) Montrer que la suite (p_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (p_n) est convergente. Quelle est sa limite ?
4. Compléter la fonction **seuil** suivante, écrite en Python, pour que celle-ci renvoie la première valeur de l'entier n vérifiant $p_n \leqslant 0.3334$.

```python
def seuil():
    p = ...
    n = ...
        while ...
            p = ...
            n = ...
    return ...
```

5. On se propose de déterminer la limite de la suite (p_n) d'une autre manière. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{3}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{11}{30} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (c) Retrouver alors la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.
6. Un professeur déclare : « C'est fou, cela fait 5 ans que je suis ici et les trois quarts du temps, cette photocopieuse est en panne ! ». Cette déclaration vous semble-t-elle juste ou excessive ?