Corrigé DS 6

EXERCICE 1 6 points **Thème : fonctions**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x$.

1. On détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   - Limite en $-\infty$

     $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right) = -\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x} = +\infty\end{array}\right\}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} = -\infty\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

   - Limite en $+\infty$

     Pour tout réel x, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + x$. Or, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

     $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = 0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x$ donc

   $f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x} + \left(x+\dfrac{1}{2}\right)\times(-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 1 = \left(-x+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + 1$, et donc

   $f''(x) = -1\times\mathrm{e}^{-x} + \left(-x+\dfrac{1}{2}\right)\times(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Le signe de f'' donne les variations de f'.

   Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$.

   - Si $x < \dfrac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ donc f' est décroissante ;
   - Si $x > \dfrac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante ;
   - Si $x = \dfrac{3}{2}$, $f''(x) = 0$ donc f' admet un minimum égal à

     $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

   c. La fonction f' admet pour minimum

   $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}78 > 0$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

   d. • La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

e. On appelle α la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx -2{,}36 < 0 \\ f(0) = 0{,}5 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in \left[-1\,;\,0\right]$

$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}3) \approx -0{,}03 < 0 \\ f(-0{,}2) \approx 0{,}17 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in \left[-0{,}3\,;\,-0{,}2\right]$

$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}29) \approx -0{,}009 < 0 \\ f(-0{,}28) \approx 0{,}011 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in \left[-0{,}29\,;\,-0{,}28\right]$

$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}286) \approx -0{,}001 < 0 \\ f(-0{,}285) \approx 0{,}0009 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in \left[-0{,}286\,;\,-0{,}285\right]$

Donc $-0{,}285$ est une valeur approchée à 10^{-3} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2\,;\,-2{,}5)$ et $(2\,;\,3{,}5)$.

1. Déterminer une équation de la droite (AB) c'est chercher l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que : $\dfrac{y-y_{\text{A}}}{x-x_{\text{A}}} = \dfrac{y_{\text{B}}-y_{\text{A}}}{x_{\text{B}}-x_{\text{A}}}$.

$$\frac{y-y_{\text{A}}}{x-x_{\text{A}}} = \frac{y_{\text{B}}-y_{\text{A}}}{x_{\text{B}}-x_{\text{A}}} \iff \frac{y+2{,}5}{x+2} = \frac{3{,}5+2{,}5}{2+2} \iff \frac{y+2{,}5}{x+2} = \frac{6}{4} \iff y+2{,}5 = \frac{6}{4}(x+2)$$
$$\iff y = \frac{3}{2}x+3-2{,}5 \iff y = 1{,}5x+0{,}5$$

La droite (AB) a pour équation : $y = 1{,}5x+0{,}5$.

2. La droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, donc $h'(0) = 1{,}5$.

$h'(x) = a \times \mathrm{e}^{-x} + (ax+b)\times(-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 1 = (-ax+a-b)\,\mathrm{e}^{-x}+1$

$h'(0) = 1{,}5 \iff (a-b)\,\mathrm{e}^{0}+1 = 1{,}5 \iff a-b = 0{,}5$

La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 0,5 donc $h(0) = 0{,}5$.

$h(0) = 0{,}5 \iff (0+b)\,\mathrm{e}^{0}+0 = 0{,}5 \iff b = 0{,}5$

Comme $a-b = 0{,}5$, on en déduit que $a = 1$.

Donc $h(x) = (x+0{,}5)\,\mathrm{e}^{-x}+x = f(x)$.

EXERCICE 1

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On note K le milieu du segment [HG].

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Les points C, F et K définissent un plan si et seulement si ils ne sont pas alignés. Les points C et K sont dans le plan (CDH) et le point F n'est pas dans le plan (CDH) ; donc les points C, F et K ne sont pas alignés et ils définissent donc un plan.
2. **a.** $\text{KG} = \frac{1}{2}$, $\text{GF} = 1$ et $\text{GC} = 1$.

   b. Le triangle FGC est rectangle en G donc son aire vaut en unités d'aire :
   $\mathscr{A} = \dfrac{\text{GF} \times \text{GC}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

   c. Le tétraèdre FGCK a pour base le triangle FGC et pour hauteur KG donc son volume vaut, en unité de volume : $\dfrac{1}{3} \times \mathscr{A} \times \text{KG} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$.
3. **a.** On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

   - $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{CF}} = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{CF}}$.
   - $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{CK}} = 1 \times 0 + 2 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{CK}}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (CFK) donc c'est un vecteur normal au plan (CFK).

   b. Le plan (CFK) est l'ensemble des points M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{\text{CM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{CM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

   $\overrightarrow{\text{CM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$.

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{CM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 &\iff (x-1) \times 1 + (y-1) \times 2 + z \times 1 = 0\\ &\iff x - 1 + 2y - 2 + z = 0 \iff x + 2y + z - 3 = 0\end{aligned}$$

   Le plan (CFK) a donc pour équation cartésienne $x + 2y + z - 3 = 0$.
4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).
   La droite Δ est orthogonale au plan (CFK) donc elle a $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur. De plus, elle passe par le point G de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Donc la droite Δ est l'ensemble des points M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{\text{GM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient colinéaires, autrement dit tels que $\overrightarrow{\text{GM}} = t \cdot \overrightarrow{n}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{\text{GM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{GM}} = t \cdot \overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\times 1 \\ y-1 &=& t\times 2 \\ z-1 &=& t\times 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1+2t \\ z &=& 1+t \end{array}\right.$

Donc la droite Δ a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1+2t \\ z &=& 1+t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).

a. Les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point L sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1+2t \\ z &=& 1+t \\ x+2y+z-3 &=& 0 \end{array}\right.$.

On a donc : $(1+t)+2(1+2t)+(1+t)-3=0$ soit $1+t+2+4t+1+t-3=0$, ou encore $6t+1=0$, soit $t=-\frac{1}{6}$.

Le point L a donc pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t &=& 1-\frac{1}{6} &=& \frac{5}{6} \\ y &=& 1+2t &=& 1-\frac{2}{6} &=& \frac{2}{3} \\ z &=& 1+t &=& 1-\frac{1}{6} &=& \frac{5}{6} \end{array}\right.$

b. $\text{LG} = \sqrt{(x_\text{G}-x_\text{L})^2 + \left(y_\text{G}-y_\text{L}\right)^2 + (z_\text{G}-z_\text{L})^2} = \sqrt{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{5}{6}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

6. Le tétraèdre FGCK a pour base le triangle CFK d'aire $\mathscr{B}$, et pour hauteur LG.

Son volume vaut donc : $\frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times \text{LG}$. Ce volume vaut $\frac{1}{12}$ donc on a :

$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times \frac{\sqrt{6}}{6}$ donc $\frac{1}{12} = \frac{\sqrt{6}}{18} \times \mathscr{B}$ donc $\frac{18}{12\sqrt{6}} = \mathscr{B}$ donc $\mathscr{B} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

L'aire du triangle CFK est, en unité d'aire : $\frac{\sqrt{6}}{4}$.