Devoir surveillé 6

► Exercice 1
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendantes

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}+x$

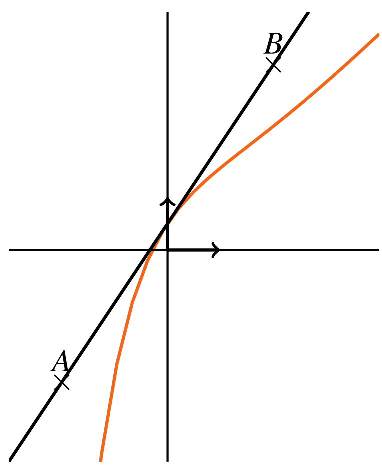
1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que pour tout réel x,
   $$f''(x) = \left(x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}$$
   (b) En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
   (c) Justifier que pour tout réel x, $f'(x) > 0$.
   (d) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   (e) Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

Partie B

On considère une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que pour tous réels x, $h(x) = (ax+b)e^{-x}+x$.

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

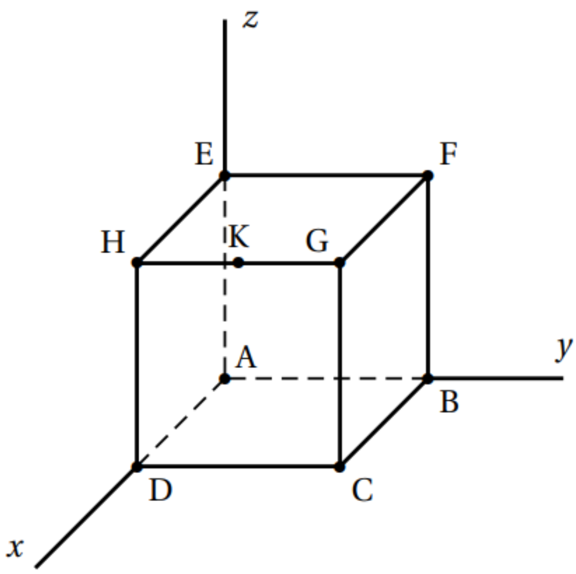
- la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h.
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2;-2{,}5)$ et $(2;3{,}5)$.



1. Déterminer une équation réduite de la droite (AB)
2. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

► Exercice 2

On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête 1, représenté ci-dessous. On note K le milieu du segment $[HG]$. On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$.



1. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.
2. (a) Donner sans justifier les longueurs KG, GF et GC.
   (b) Calculer l'aire du triangle FGC.
   (c) Calculer le volume du tétraèdre $FGCK$.
   On rappelle que la volume V d'un tétraèdre est donné par
   $$V = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times h$$
   où $\mathscr{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.
3. On note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (CFK).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est $x+2y+z-3=0$.
4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK). Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est
   $$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK)
   (a) Déterminer les coordonnées du point L.
   (b) En déduire que $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$
6. En utilisant la question **2.**, déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.