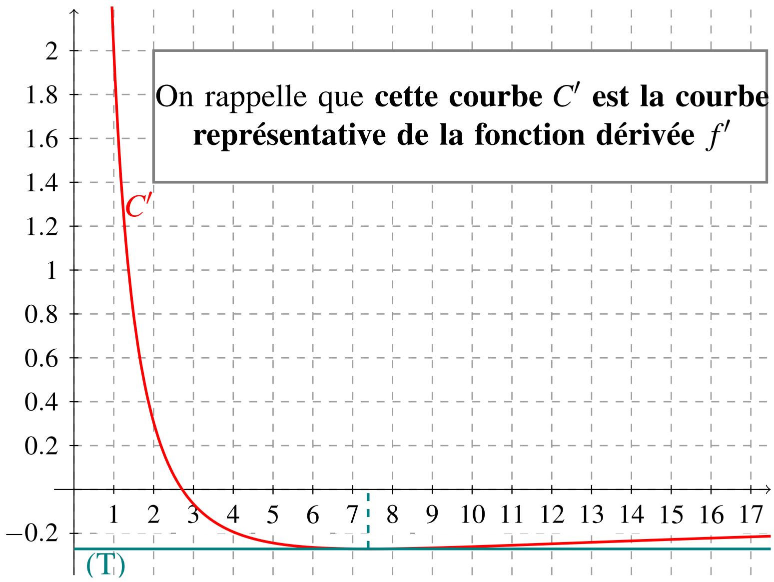
Devoir surveillé 7

► Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln(x)) \times \ln(x)$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.

La **courbe** C' est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :
   (a) le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.
   (b) le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

2. (a) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. En déduire que C admet une asymptote dont on donnera l'équation.

3. (a) Montrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln(x))}{x}$.
   (b) En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$. On fera apparaître dans ce tableau les limites de f en 0 et $+\infty$ ainsi que la valeur de son extremum.

4. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 4}{x^2}$.
   (a) Déterminer les intervalles sur lesquelles la fonction f est convexe/concave.
   (b) Donner une équation réduite de la tangente à C au point d'abscisse 1.
   (c) En déduire que pour tout réel $x \in [0,e^2]$, on a $f(x) \leqslant 2x - 2$.

5. (a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto -x(2 - \ln(x))^2$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
   (b) En déduire une expression de l'unique primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

► Exercice 2 — Probabilités

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-2x+3}$ sur $\mathbb{R}$ est...

   A. $F : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+3}$ **B.** $F : x \mapsto \ln(x^2-2x+3)$

   C. $F : x \mapsto 2\ln(x^2-2x+3)$ **D.** $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+3)$

2. Une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2xe^{1-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est...

   A. $F : x \mapsto x^2e^{1-x^2}$ **B.** $F : x \mapsto -x^2e^{1-x^2}$ **C.** $F : x \mapsto e^{1-x^2}$ **D.** $F : x \mapsto -e^{1-x^2}$

3. Une primitive de la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$ est...

   A. $F : x \mapsto (1+x)e^x$ **B.** $F : x \mapsto (2+x)e^x$

   C. $F : x \mapsto \left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)e^x$ **D.** $F : x \mapsto 1+xe^x$

Partie B

Dans cette partie, les réponses seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} *près.*

Un lycéen passe un concours dont la première épreuve est un QCM comportant 12 questions. Pour chaque question, quatre propositions sont données dont une seule exactement est correcte. Ce lycéen n'ayant pas préparé sérieusement l'épreuve ne connaît aucune réponse et répond au hasard et de manière indépendante à toutes les questions. On note X son nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X soit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer l'espérance de X et interpréter selon le contexte de l'exercice.
3. Quelle est la probabilité que le lycéen donne exactement 2 bonnes réponses ?
4. Quelle est la probabilité que le lycéen donne au maximum 2 bonnes réponses ?

Les concepteurs de sujet réfléchissent à augmenter le nombre de questions. On note alors n le nombre de questions posées dans cette nouvelle version du questionnaire et p_n la probabilité qu'un élève qui répond au hasard ait au moins une bonne réponse.

5. Justifier que $p_n = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$
6. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
7. Déterminer, à l'aide d'un calcul, le nombre de questions que doit comporter le questionnaire pour que la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse si l'on répond à toutes les questions au hasard soit supérieure à 0.99.