Sommes et produits

1 Sommes

1.1 Notation Σ

Définition 1 : Soit m et n des entiers naturels avec $m \leqslant n$. Soit x_m, x_{m+1}, ..., x_n des réels.
La somme de tous les x_k, pour k allant de m à n, s'écrit

$$\sum_{k=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + \ldots + x_n.$$

Cette somme peut également être notée $\sum_{m \leqslant k \leqslant n} x_k$ ou encore $\sum_{k \in [\![m;n]\!]} x_i$.

L'indice k est ce que l'on appelle une variable muette : elle n'existe que dans la somme et son existence prend fin une fois cette somme terminée. Cet indice peut se noter de différentes manières. $\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{\heartsuit=m}^{n} x_\heartsuit$.

On conviendra par ailleurs que la somme des éléments de l'ensemble vide vaut 0.

R De manière générale, si I désigne une partie finie de $\mathbb{N}$, on peut désigner par $\sum_{i \in I} x_i$ la somme de tous les x_i où l'indice i parcourt les éléments de I.

■ **Exemple 1 :** On a

- $\sum_{k=6}^{9} k = 6+7+8+9 = 30.$
- $\sum_{j=3}^{7} 2^j = 2^3+2^4+2^5+2^6+2^7 = 8+16+32+64+128 = 248.$
- $\sum_{i=243}^{247} 4 = 4+4+4+4+4 = 20.$

Propriété 1 : La somme $\sum_{k=m}^{n} x_i$ contient $n-m+1$ termes !

■ **Exemple 2 :** Soit $a \in \mathbb{R}$. $\sum_{k=m}^{n} a$ contient $n-m+1$ termes, tous égaux à a, et vaut donc $(n-m+1)a$.

R Il ne faut pas hésiter à écrire la somme de manière extensive (avec des points de suspension) si l'on ne voit pas comment commencer !

1.2 Propriété des sommes

Propriété 2 : Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Soit x_m, x_{m+1}, ..., x_n et y_m, y_{m+1}, ..., y_n des réels. Soit λ et μ des réels. On a

$$\sum_{k=m}^{n}(\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} x_k \quad ; \quad \sum_{k=m}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k.$$

■ **Exemple 3 :** Soit n un entier naturel. Notons $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{k} + \frac{n}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} 2 + n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2n + nS = (2+S)n.$$

Propriété 3 — Relation de Chasles : Soit m, n et p des entiers naturels tels que $m \leqslant n \leqslant p$. Soit x_m, x_{m+1}, ..., x_n des réels. On a

$$\sum_{k=m}^{p} x_k = \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{p} x_k.$$

■ **Exemple 4 :** Un cas particulier souvent utilisé dans les démonstrations par récurrence est le suivant :

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1}.$$

Propriété 4 : Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Soit x_m, ..., x_n et y_m, ..., y_n des réels.

Si, pour tout $k \in [\![m;n]\!]$, on a $x_k \leqslant y_k$, alors $\sum_{k=m}^{n} x_k \leqslant \sum_{k=m}^{n} y_k$.

■ **Exemple 5 :** Soit n un entier naturel non nul. On considère la somme $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[1;n]$, on a alors $1 \geqslant \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{n}$.

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, on a donc $\sum_{k=1}^{n} 1 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $n \geqslant S \geqslant 1$.

Propriété 5 — Inégalité triangulaire : L'inégalité triangulaire se généralise à toute somme finie.

Soit n un entier naturel. Soit x_1, ..., x_n des réels. On a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Démonstration 1 : Cette inégalité se démontre justement par récurrence, en utilisant la relation de Chasles mentionnée un peu plus haut et l'inégalité triangulaire pour deux termes. □

1.3 Sommes classiques

Propriété 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Remarquons que le premier terme de ces sommes étant 0, nous pouvons également les commencer à l'indice 1 sans changer le résultat. Nous allons démontrer ces deux résultats par récurrence.

Démonstration 2 : Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ »

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $\frac{0 \times (0+1)}{2} = 0$ et $\sum_{k=0}^{0} k = 0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

  En ajoutant $n+1$ à chaque membre de l'égalité, on a donc $\sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$.

  Or, d'après la relation de Chasles, $\sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} k$.

  Par ailleurs,

  $$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

  Ainsi, $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : La proposition $\mathcal{P}$ est initialisée et est héréditaire.

  D'après le principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

□

Exemple 6 : On souhaite déterminer la somme des premiers entiers naturels impairs $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n} (2k) + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

Or, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} 1$ est la somme de $(n+1)$ termes qui valent tous 1. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = n(n+1) + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$.

R Ce dernier résultat aurait aussi pu être démontré par récurrence, après avoir calculé les premiers termes et conjecturé l'expression de cette somme en fonction de n.

■ **Exemple 7 :** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On souhaite calculer $\sum_{k=3}^{n} k$.

On a $\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+\sum_{k=3}^{n} k$. Ainsi, $\sum_{k=3}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k - 3 = \frac{n(n+1)}{2} - 3 = \frac{n^2+n-6}{2}$.

Or, n^2+n-6 est un polynôme du second degré. Les solutions de l'équation $n^2+n-6=0$ sont 2 et -3, on a donc $n^2+n-6=(n-2)(n+3)$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $\sum_{k=3}^{n} k = \frac{(n-2)(n+3)}{2}$.

Démonstration 3 : Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »

- **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $\frac{0\times(0+1)\times(2\times0+1)}{6} = 0$ et $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

  Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

  Cette égalité se réécrit alors $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

  D'après la relation de Chasles, on a $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

  Or, $2n^2+7n+6$ est un polynôme du second degré, dont le discriminant vaut $7^2-4\times2\times6=1>0$.

  Les solutions de l'équation $2n^2+7n+6=0$ sont donc $\frac{-7-\sqrt{1}}{2\times2} = -2$ et $\frac{-7+\sqrt{1}}{2\times2} = -\frac{3}{2}$.

  Ces solutions nous permettent de factoriser le polynôme du second degré. On a en effet :

$$2n^2+7n+6 = 2\left(n-(-2)\right)\left(n-\left(-\frac{3}{2}\right)\right) = (n+2)\times2\left(n+\frac{3}{2}\right) = (n+2)(2n+3)$$

  Ainsi, on a bien $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : La proposition $\mathcal{P}$ est initialisée et est héréditaire.
  D'après le principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

□

R On aurait aussi pu développer l'expression $(n+2)(2n+3)$ et vérifier que l'on trouve bien $2n^2+7n+6$.

■ **Exemple 8 :** Soit n un entier naturel. On souhaite calculer $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \sum_{k=0}^{n} (k^2+k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Or,

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Propriété 7 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et q un réel différent de 1. Alors

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration 4 : Soit q un réel différent de 1, n un entier naturel et $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$. On a alors

$$(1-q)S = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} (1-q)q^k = \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1}) = q^0 - q^1 + q^1 - q^2 + \ldots + q^{n-1} - q^n + q^n - q^{n+1}.$$

Après simplification, on a donc $(1-q)S = 1-q^{n+1}$. Puisque $q \neq 1$, on peut diviser cette égalité par $1-q$.

Conclusion : Pour tout réel $q \neq 1$, pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. □

R La manipulation que nous avons effectuée ici est un cas particulier de somme télescopique que nous étudierons peu plus bas. On aurait également pu procéder par récurrence.

■ **Exemple 9 :** Soit n un entier naturel non nul. On souhaite calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

Remarquons d'abord que pour tout entier naturel k, on a $\frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Par ailleurs, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - 1$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - 1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1.4 Manipulations sur les sommes

Propriété 8 — Changement d'indice : Soit m, n et p des entiers naturels avec $p \leqslant m \leqslant n$. Soit x_m, x_{m+1}, ..., x_n des nombres réels. En posant le changement d'indice $j = k - p$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{j=m-p}^{n-p} x_{j+p}$$

Méthode 1 : Pour réaliser un changement d'indice dans une somme qui dépend d'un indice k.

- On pose la nouvelle variable $j = k - m$ (ou $j = k + m$), selon les cas ;
- On remplace les indices k dans la somme, en notant que $k = j + m$ (ou $k = j - m$) ;
- On détermine les nouvelles bornes : lorsque $k = \ldots$ on a $j = \ldots$.

■ **Exemple 10 :** On considère la somme $\displaystyle\sum_{k=5}^{10} \frac{1}{k-3}$.

- On pourrait préférer avoir une somme qui débute à l'indice 0. On pose donc $j = k - 5$. On a donc $k = j + 5$. Lorsque k va de 5 à 10, j va lui de 0 à 5. Ainsi,

$$\sum_{k=5}^{10} \frac{1}{k-3} = \sum_{j=0}^{5} \frac{1}{(j+5)-3} = \sum_{j=0}^{5} \frac{1}{j+2}$$

- On pourrait aussi vouloir exprimer le terme dans la somme de manière plus simple. On pose donc $j = k - 3$. On a donc $k = j + 3$. Lorsque k va de 5 à 10, j va lui de 2 à 7. Ainsi,

$$\sum_{k=5}^{10} \frac{1}{k-3} = \sum_{j=2}^{7} \frac{1}{j}.$$

Il y a donc de multiples manières d'écrire une même somme ! Suivant le contexte, certaines d'entre elles seront plus pratiques que d'autres.

Propriété 9 — Changement d'indice décroissant : Soit m, n et p des entiers naturels avec $m \leqslant n$. Soit x_m, x_{m+1}, ..., x_n des nombres réels. En posant le changement d'indice $j = n - k$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{j=m}^{n} x_{n-j}$$

R Ce changement d'indice revient à écrire la somme dans l'autre sens. La méthode est la même que pour le changement d'indice précédent, mais il faut penser à **changer le sens des bornes**.

■ **Exemple 11 :** Soit n un entier naturel non nul et $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k}$.

On pose $j = n - k$. On a alors $k = n - j$. Lorsque k vaut 1, j vaut $n - 1$. Lorsque k vaut n, j vaut 0. Ainsi,

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1}.$$

R On pourrait alors effectuer un nouveau changement d'indice pour avoir le terme $\frac{1}{j}$ dans la somme.

Propriété 10 — Somme télescopique : Soit m et n des entiers naturels avec $m \leqslant l$. Soit x_m, x_{m+1}, ..., x_n des réels. Alors,

$$\sum_{i=m}^{n}(x_{i+1}-x_i) = x_{n+1}-x_m$$

■ **Exemple 12 :** On souhaite déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

On remarque que pour tout entier k non nul, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

R Encore une fois, il est judicieux, lorsque l'on a un doute, de réécrire la somme avec des points de suspension. On a en effet : $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$.

2 Produits

Définition 2 : Soit m et n des entiers naturels avec $m \leqslant n$. Soit x_m, x_{m+1}, ..., x_n des nombres réels. Le produit de tous les x_k, pour k allant de m à n, s'écrit

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = x_m \times x_{m+1} \times \ldots \times x_n.$$

On conviendra par ailleurs que le produit des éléments de l'ensemble vide vaut 1.

■ **Exemple 13 :** Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}$. Ce produit contient en effet $m-n+1$ termes égaux à a.

■ **Exemple 14 :** Soit n un entier naturel. La factorielle de n est définie par $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Propriété 11 : Soit m et n des entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Soit x_m, ..., x_n et y_m, ..., y_n des réels. Soit λ un réel.

$$\prod_{k=m}^{n}(x_k y_k) = \prod_{k=m}^{n} x_k \times \prod_{k=m}^{n} y_k \quad ; \quad \prod_{k=m}^{n}(\lambda x_k) = \lambda^{n-m+1}\prod_{k=m}^{n} x_k.$$

■ **Exemple 15 :** Le produit des n premiers entiers pairs non nuls s'écrit $\prod_{k=1}^{n}(2k)$. Il vaut $2^n\prod_{k=1}^{n} k$ soit $2^n n!$.

Propriété 12 : Soit m et n des entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Soit x_m, ..., x_n des réels. On a alors :

$$\exp\left(\sum_{k=m}^{n} x_k\right) = \prod_{k=m}^{n} \mathrm{e}^{x_k} \quad ; \quad \ln\left(\prod_{k=m}^{n} x_k\right) = \sum_{k=m}^{n} \ln(x_k).$$

Démonstration 5 : Par récurrence, évidemment... □

■ **Exemple 16 :** Soit n un entier naturel. On a

$$\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Propriété 13 — Produit télescopique : Soit m et n des entiers naturels avec $m \leqslant n$. Soit x_m, x_{m+1}, ..., x_n des nombres réels non nuls. Alors,

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_i} = \frac{x_{n+1}}{x_m}.$$

■ **Exemple 17 :** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On souhaite calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}$.

Remarquons que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$. Ainsi,

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} \times \frac{k}{k+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+1}.$$

On reconnaît alors deux produits télescopiques. D'une part,

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{n-1}{n-2} \times \frac{n}{n-1} = \frac{n}{1} = n.$$

D'autre part,

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2}{n+1}.$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{2n}{n+1}$.

Naturellement, il est également possible de procéder à un changement d'indice pour les produits.

3 Sommes doubles

3.1 Domaine rectangulaire

Soit n et p des entiers naturels non nuls.

On considère des réels $x_{i,j}$ avec $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$. On range ces valeurs dans un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes.

$$\begin{array}{cccccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & x_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i,1} & x_{i,2} & \cdots & x_{i,j} & \cdots & x_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,j} & \cdots & x_{n,p} \end{array}$$

La somme de tous les éléments de ce tableau s'écrit $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} x_{i,j}$.

Or, pour calculer la somme de tous ces éléments, plusieurs stratégies s'offrent à nous :

- On peut calculer la somme des éléments pour chaque ligne, puis ajouter toutes ces sommes.
  On calcule alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{i,j}\right)$.
- On peut calculer la somme des éléments pour chaque colonne, puis ajouter toutes ces sommes.
  On calcule alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right)$.

Évidemment, étant données les propriétés de l'addition, les trois sommes que nous obtenons sont les mêmes.

Propriété 14 : Soit m et n deux entiers naturels et $(x_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille de réels. On a

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right).$$

Si $n = p$, on pourra utiliser la notation suivante.

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right).$$

Méthode 2 : Pour calculer une somme double sur un domaine rectangulaire.

- On fixe l'un des deux indices (selon les cas, l'un pourra être préférable à l'autre) ;
- Le calcul de somme double revient alors au calcul de deux sommes simples.

■ **Exemple 18 :** Soit n un entier naturel. Calculons $S = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij^2$. On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij^2\right).$$

Soit donc i un entier naturel. On a alors,

$$\sum_{j=1}^{n} ij^2 = i\times\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{in(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En effet, puisque i ne dépend pas de l'indice j de la somme, on peut le mettre en facteur. Finalement,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{in(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{n(n+1)}{2}.$$

Conclusion : On a $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij^2 = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}$.

3.2 Domaine triangulaire

Soit n un entiers naturel non nul. On considère des réels $x_{i,j}$ avec $i\in[\![1;n]\!]$ et $j\in[\![1;p]\!]$. On range ces valeurs dans un tableau carré à n lignes et n colonnes.

$$\begin{array}{cccccc}
x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,n}\\
 & x_{2,2} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & x_{2,n}\\
 & & \ddots & \vdots & & \vdots\\
 & & & x_{j,j} & \cdots & x_{i,n}\\
 & & & & \ddots & \vdots\\
 & & & & & x_{n,n}
\end{array}$$

On souhaite calculer la somme S de tous les éléments de ce tableau.

- **Sommation suivant les lignes** : On calcule la somme des termes de la première ligne, puis on ajoute les termes de la deuxième ligne, ... et enfin la somme des termes de la n-ième ligne :

$$S = \sum_{j=1}^{n} x_{1,j} + \sum_{j=2}^{n} x_{2,j} + \ldots + \sum_{j=i}^{n} x_{i,j} + \ldots + \sum_{j=n}^{n} x_{n,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right).$$

- **Sommation suivant les colonnes** : On calcule la somme des termes de la première colonne, puis on ajoute les termes de la deuxième colonne, ... et enfin la somme des termes de la n-ième colonne :

$$S = \sum_{i=1}^{1} x_{i,1} + \sum_{i=1}^{2} x_{i,2} + \ldots + \sum_{i=1}^{j} x_{i,j} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_{i,n} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}\right).$$

Là encore, les deux sommes obtenues sont identiques. On obtient alors une nouvelle formule d'inversion.

Propriété 15 : Soit m et n deux entiers naturels et $(x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ une famille de réels. On a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}x_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{j}x_{i,j}\right).$$

On notera cette somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}x_{i,j}$.

R On peut définir de manière analogue $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_{i,j}$ par $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}x_{i,j}\right)$ ou $\displaystyle\sum_{j=2}^{p}\left(\sum_{i=1}^{j-1}x_{i,j}\right)$.

Méthode 3 : Pour calculer une somme double où les indices i et j sont liés entre eux.

- On choisit l'un des deux indices (selon les cas, l'un pourra être préférable à l'autre).
- On exprime les conditions sur les deux indices, en commençant par celui que l'on a choisi. La condition sur cet indice ne doit donc pas dépendre de l'autre indice.
- Le calcul de somme double revient alors au calcul de deux sommes simples.

■ **Exemple 19 :** Soit n un entier naturel. On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}$.

Quelle formulation adopter ? On remarque que $\frac{i}{j}=i\times\frac{1}{j}$.

Or, nous n'avons pas de formule pour la somme des $\frac{1}{j}$, alors que nous en avons une pour la somme des i.

Il paraît donc judicieux de calculer dans un premier temps la somme sur les indices i puis, dans un deuxième temps, celle sur les indices j.

Exprimons alors chacune des conditions respectées par les indices en commençant par l'indice j, puisqu'il sera le dernier à être pris en compte dans le calcul de notre somme. D'une part, l'indice j varie de 1 à n. Une fois j fixé, l'indice i varie de 1 à j. Notre somme se réécrit donc

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right).$$

Soit donc j un entier. Calculons alors la somme entre parenthèse. Dans cette somme, l'indice de sommation est i, on peut donc la factoriser par $\dfrac{1}{j}$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}=\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}i=\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2}=\frac{j+1}{2}$$

et donc,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{n(n+3)}{4}.$$

Conclusion : On a $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}=\frac{n(n+3)}{4}$.

Méthode 4 : Pour intervertir les symboles Σ dans une somme double à indices dépendants $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right)$.

- On réécrit les deux conditions sur les indices : $1 \leqslant i \leqslant n$ et $i \leqslant j \leqslant n$;
- On synthétise ces deux conditions en une seule : $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
- On procède comme précédemment, en commençant cette fois par l'indice j.
  On a donc $1 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant i \leqslant j$.

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}\right).$$