Sommes et produits

Notation Σ et sommes usuelles

► Exercice 1 : Manipuler la notation – Voir le corrigé

Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ.

$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ $\qquad$ $B = 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2$

$C = 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7$ $\qquad$ $D = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37$

► Exercice 2 : Quelques sommes – Voir le corrigé

Donner la valeur des sommes suivantes.

$\sum_{i=3}^{7}(2i-5)$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{6}(-1)^k k$ $\qquad$ $\sum_{i=23}^{29}\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{n} 2n$ (où $n \in \mathbb{N}$).

► Exercice 3 : Informatique ! – Voir le corrigé

1. Écrire une fonction Python `somme` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
2. Écrire une fonction Python `seuil` qui prend en entrée un réel a et renvoie le plus petit n tel que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqslant a$.

► Exercice 4 : Sommes usuelles – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel. Calculer les sommes suivantes.

$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+3}}{3^{k+1}}$ $\qquad$ $\sum_{k=2}^{n}2^k$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{n}(4k+3)$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}$

$\sum_{k=2}^{n}(2k+3)$ $\qquad$ $\sum_{k=p}^{n}q^k$ où $q \neq 1$ et $p \leqslant n$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{n}2^{3k+2}$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{n}(k+2)(k+5)$

► Exercice 5 : Somme des cubes – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel. Montrer que $\sum_{k=0}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

► Exercice 6 : Une autre somme – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel. Montrer que $\sum_{k=0}^{n}k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

► Exercice 7 : Somme usuelle dérivée – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}x^k$

1. Que vaut $f(1)$? Donner une expression de $f(x)$ pour tout réel x différent de 1.
2. En utilisant la dérivée de f, déterminer une expression de $\sum_{k=0}^{n}kx^k$ pour tout réel $x \neq 1$.

► Exercice 8 : Encadrement de somme – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul et $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que $\frac{1}{n} \leqslant S \leqslant 1$.

► Exercice 9 : Factorisation remarquable – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul. Factoriser $a^n - b^n$.

Manipulations sur les sommes

► Exercice 10 : Télescopage – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel. Calculer les sommes suivantes en faisant apparaître une somme télescopique.

a. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ **b.** $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ **c.** $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$

► Exercice 11 : La somme des entiers revient... – Voir le corrigé

On se propose de démontrer un résultat du cours d'une autre manière. Soit n un entier naturel. On note $S = \sum_{k=0}^{n} k$.

1. Soit k un entier naturel. Que vaut $(k+1)^2 - k^2$?
2. En calculant $\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^2 - k^2)$ de deux manières différentes, montrer que $(n+1)^2 = 2S + (n+1)$.
3. Retrouver la valeur de la somme S.

► Exercice 12 : ... puis la somme des carrés – Voir le corrigé

En calculant $\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^3 - k^3)$ de deux manières différentes, montrer que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

► Exercice 13 : Découpage d'une somme – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel.

1. On note $A_n = \sum_{k=2n+1}^{3n} (2n)$. Déterminer la valeur de A_n.
2. On note $B_n = \sum_{k=n}^{2n} k$. Déterminer la valeur de B_n.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=n}^{3n} \min(k, 2n)$.

Produits

► Exercice 14 : Notation produit – Voir le corrigé

Écrire les produits suivants à l'aide du symbole Π.

$A = 1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32$ $B = 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 \times 21$
$C = -2 \times 3 \times (-4) \times 5 \times (-6)$ $D = 25 \times 22 \times 19 \times 16 \times 13 \times 10 \times 7$

► Exercice 15 : Produits simples – Voir le corrigé

Donner la valeur des produits suivants.

$\prod_{i=3}^{8} (2i-9)$ $\prod_{k=0}^{3} 3^k$ $\prod_{i=17}^{25} 2$

► Exercice 16 : Informatique ! – Voir le corrigé

Écrire une fonction Python `produit` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^3}\right)$.

► Exercice 17 : Calcul de produits – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel. Donner la valeur des produits suivants.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad \prod_{k=0}^{n}2^k \qquad \prod_{k=0}^{n}(3-k)$$

► Exercice 18 : Somme de produits – Voir le corrigé

Soit j un entier naturel. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n}\prod_{i=0}^{j}(k+i)=\frac{1}{j+2}\prod_{i=0}^{j+1}(n+i)$.

Sommes doubles

► Exercice 19 : Sommes doubles – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}1 \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}i \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}n^{i+j}$$

► Exercice 20 : Un découpage – Voir le corrigé

Soit $n\in\mathbb{N}$. En découpant judicieusement cette somme, calculer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)$.

► Exercice 21 : Indices séparés – Voir le corrigé

Soit n et p deux entiers naturels. On considère des réels a_i et b_j pour $i\in[\![1;n]\!]$ et $j\in[\![1;p]\!]$.

Montrer que $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}a_ib_j=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p}b_j\right)$.

► Exercice 22 : Sommes doubles avec indices dépendants – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}1 \qquad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}i \qquad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j) \qquad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|i-j|$$

► Exercice 23 : Informatique ! – Voir le corrigé

1. Écrire une fonction Python `somme_1` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}i^j$.
2. Écrire une fonction Python `somme_2` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}i^j$.

► Exercice 24 : Interversion – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $u_n=\sum_{i=1}^{n}S_i$. Montrer que $u_n=(n+1)S_n-n$.

► Exercice 25 : Où est la somme double ? – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul et x un réel différent de 1. En introduisant une somme, calculer $\sum_{k=1}^{n}kx^k$.

Corrections

▶ Correction 1 – Voir l'énoncé

Les solutions données ici ne sont pas les seules possibles !

1. $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}$.
2. $B = 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 = \sum_{k=6}^{12} k^2$.
3. $C = 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7 = \sum_{k=2}^{6} k(k+1)$
4. $D = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 = \sum_{k=10}^{18} (2k+1)$

▶ Correction 2 – Voir l'énoncé

On a

1. $\sum_{i=3}^{7} (2i-5) = (2 \times 3 - 5) + (2 \times 4 - 5) + (2 \times 5 - 5) + (2 \times 6 - 5) + (2 \times 7 - 5) = 25$;
2. $\sum_{k=0}^{6} (-1)^k k = 0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 = 3$;
3. $\sum_{i=23}^{29} \frac{4}{5} = (29 - 23 + 1) \times \frac{4}{5} = \frac{28}{5}$;
4. $\sum_{k=0}^{n} 2n = (n - 0 + 1) \times 2n = 2n(n+1)$. Attention ici : l'indice est k et n de dépend pas de cet indice.

▶ Correction 3 – Voir l'énoncé

```python

def somme(n):
    total = 0
    for i in range(1, n+1):
        total = total + 1/i
    return total

def seuil(a):
    total = 0
    i = 0
    while total < a :
        i = i + 1
        total = total + 1 / i
    return i
```

▶ Correction 4 – Voir l'énoncé

Le but est de décomposer le terme dans la somme pour se retrouver avec une somme géométrique. On a ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+3}}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^k} \times \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{8}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 8\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Pour cette deuxième somme, on peut, au choix, effectuer un changement d'indice pour avoir un début à l'indice 0, ou compléter la somme avec les premiers indices.

$$\sum_{k=2}^{n} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k - 1 - 2 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 3 = 2^{n+1} - 1 - 3 = 2^{n+1} - 4.$$

Pour la troisième somme, on utilise la linéarité de la somme.

$$\sum_{k=0}^{n} (4k+3) = 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 3 = 4\frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) = 2n(n+1) + 3(n+1) = (n+1)(2n+3)$$

Pour la quatrième somme, on va de nouveau faire apparaître une somme géométrique.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k} \times 2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{5}\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

Pour la cinquième somme, on utilise d'abord la linéarité de la somme.

$$\sum_{k=2}^{n} (2k+3) = 2\sum_{k=2}^{n} k + \sum_{k=2}^{n} 3$$

Or,

$$\sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k - 1 - 0 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n} 3 = 3(n-2+1) = 3(n-1).$$

Ainsi,

$$\sum_{k=2}^{n} (2k+3) = 2 \times \frac{n^2+n-2}{2} + 3(n-1) = n^2 + 4n - 5$$

Pour la sixième somme, remarquons que

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{p-1} q^k + \sum_{k=p}^{n} q^k.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{p-1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^{p-1+1}}{1-q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}.$$

Pour la septième somme, on fait apparaître une somme géométrique.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2} = \sum_{k=0}^{n} 2^{3k} \times 2^2 = 4\sum_{k=0}^{n} 8^k = 4 \times \frac{1-8^{n+1}}{1-8} = -\frac{4}{7}(1-8^{n+1}).$$

Pour la huitième somme, commençons par développer, puis on utilise la linéarité de la somme.

$$\sum_{k=0}^{n} (k+2)(k+5) = \sum_{k=0}^{n} (k^2+7k+10) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 7\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 10.$$

On reconnaît alors des sommes usuelles.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+2)(k+5) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{7n(n+1)}{2}+10(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+21n(n+1)+60(n+1)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1)+21n+60)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+22n+60)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(n^2+11n+30)}{3}
\end{aligned}$$

Il est aussi possible de factoriser le poynôime du second degré en déterminant ses racines (-5 et -6) pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{n}(k+2)(k+5)=\frac{(n+1)(n+5)(n+6)}{3}.$$

► Correction 5 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ »

- Initialisation : pour $n=0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}k^3=0$ et $\dfrac{0^2(0+1)^2}{4}=0$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}k^3 &= \sum_{k=0}^{n}k^3+(n+1)^3\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 \qquad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= (n+1)^2\times\left(\frac{n^2}{4}+(n+1)\right)\\
&= (n+1)^2\times\frac{n^2+4n+4}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \qquad \text{(identité remarquable)}
\end{aligned}$$
$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ »

- Initialisation : pour $n=0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}k(k+1)(k+2)=0$ et $\dfrac{0(0+1)(0+2)(0+3)}{4}=0$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n}{4}+1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}\end{aligned}$$
$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On a $f(1) = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1) \times 1 = (n+1)$.

Pour tout réel $x \neq 1$, on a $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-n}$.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles et dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout réel $x \neq 1$, on a alors

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Par ailleurs, les fonctions $x \mapsto x^k$ sont aussi dérivables sur ces intervalles. Ainsi, pour tout réel $x \neq 1$, on a également

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}.$$

Remarquons que l'on peut commencer la somme à 0 ou à 1 puisque le premier terme de cette somme vaut 0. Ainsi, pour tout réel $x \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} \times x = x \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = x \times \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Soit n un entier naturel et $k \in [\![1,n]\!]$.

La fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $1 \leqslant k^2 \leqslant n^2$. De plus, la fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on a $1 \geqslant \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{n^2}$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1.$$

et donc

$$\frac{n}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant n.$$

On a bien $\boxed{\frac{1}{n} \leqslant S \leqslant 1}$.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Si $a = 0$ ou $b = 0$, il n'y a rien à faire... Par ailleurs, si $a = b$, alors $a^n - b^n = 0$.

Supposons désormais que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a \neq b$. On a alors

$$a^n - b^n = a^n\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right) = a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right).$$

Or, puisque $a \neq b$, on a $\frac{b}{a} \neq 1$ et on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1-\frac{b}{a}} \qquad \text{donc} 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(1-\frac{b}{a}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^k.$$

Ainsi,

$$a^n - b^n = a^n \times \left(1-\frac{b}{a}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^k$$

En remarquant que $a^n = a \times a^{n-1}$, on a alors

$$a^n - b^n = a \times \left(1-\frac{b}{a}\right) \times a^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k}.$$

► Correction 10 – Voir l'énoncé

a. On utilise la quantité conjuguée. Pour tout entier naturel k, on a

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}^2-\sqrt{k}^2} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{0}) = \sqrt{n+1}-\sqrt{0} = \sqrt{n+1}.$$

b. Soit k un entier naturel non nul. On a

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) = \ln(n+1)-\ln(1) = \ln(n+1).$$

c. L'astuce consiste à écrire $k = k+1-1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} k\times k! = \sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\times k! = \sum_{k=0}^{n}((k+1)\times k! - k!) = \sum_{k=0}^{n}((k+1)!-k!) = (n+1)!-0! = (n+1)!$$

► Correction 11 – Voir l'énoncé

On note $S = \sum_{k=0}^{n} k$.

1. Soit k un entier naturel. On a $(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1$.
2. D'une part, $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^2-k^2)=(n+1)^2-0^2=(n+1)^2$.

   D'autre part, $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^2-k^2)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1=2\sum_{k=0}^{n}k+n+1$.

   Ainsi, $(n+1)^2=2\sum_{k=0}^{n}k+(n+1)$.

   Il en vient que $2\sum_{k=0}^{n}k=(n+1)^2-(n+1)=(n+1)(n+1-1)=n(n+1)$.

   Finalement, $\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Soit n un entier naturel. D'une part, $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^3-k^3)=(n+1)^3-0^3)=(n+1)^3$.

Par ailleurs, pour tout entier naturel k, on a $(k+1)^3-k^3=k^3+3k^2+3k+1-k^3=3k^2+3k+1$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^3-k^3)=\sum_{k=0}^{n}(3k^2+3k+1)=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1$.

Or, $\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n}1=(n+1)$. Ainsi, on a

$$(n+1)^3=3\sum_{k=0}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+(n+1)$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)\right)=\frac{2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2(n+1)^2-3n-2)}{6}$$

Or,

$$2(n+1)^2-3n-2=2n^2+4n+2-3n-2=2n^2+n=n(2n+1)$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

► Correction 13 – Voir l'énoncé

Attention : le terme dans la somme ne dépend pas de k. Ainsi

$$A_n=\sum_{k=2n+1}^{3n}(2n)=2n\times(3n-(2n+1)+1)=2n\times n=2n^2.$$

Par ailleurs,

$$B_n=\sum_{k=n}^{2n}k=\sum_{k=0}^{2n}k-\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{2n(2n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}.$$

Ainsi,

$$A_n = n(2n+1) - \frac{n(n-1)}{2} = n\left(2n+1-\frac{n-1}{2}\right) = n \times \frac{4n+2-(n-1)}{2} = n \times \frac{3n+3}{2} = \frac{3}{2}n(n+1).$$

On découpe alors la dernière somme. En effet, si $k \leqslant 2n$, alors $\min(k,2n) = k$. Sinon, on a $\min(k,2n) = 2n$. Ainsi,

$$\sum_{k=n}^{3n} \min(k,2n) = \sum_{k=n}^{2n} \min(k,2n) + \sum_{k=2n+1}^{3n} \min(k,2n) = \sum_{k=n}^{2n} k + \sum_{k=2n+1}^{3n} (2n).$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n}^{3n} \min(k,2n) = A_n + B_n = 2n^2 + \frac{3}{2}n(n+1) = n\left(2n+\frac{3}{2}(n+1)\right) = \frac{n(4n+(3n+1))}{2} = \frac{n(7n+3)}{2}.$$

▶ Correction 14 – Voir l'énoncé

On a

$$A = \prod_{k=0}^{5} 2^k \qquad B = \prod_{k=0}^{6} (2k+9) \qquad C = \prod_{k=2}^{6} (-1)^{k+1}k \qquad D = \prod_{k=0}^{6} (25-3k)$$

▶ Correction 15 – Voir l'énoncé

On a

- $\prod_{i=3}^{8}(2i-9) = (2\times3-9)\times(2\times4-9)\times(2\times5-9)\times(2\times6-9)\times(2\times7-9)\times(2\times8-9) = -3\times -1\times1\times3\times5\times7 = 315.$
- $\prod_{k=0}^{3} 3^k = 3^0\times3^1\times3^2\times3^3 = 3^6 = 729.$
- $\prod_{i=17}^{25} 2 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^9 = 512.$

▶ Correction 16 – Voir l'énoncé

```python
def produit(n):
    total = 1
    for i in range(2, n+1):
        total = total * (1 - 1/(k**3))
    return total
```

▶ Correction 17 – Voir l'énoncé

On fait apparaître un produit télescopique.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1.$$

Pour la deuxième somme, on utilise les règles de calcul sur les puissances.

$$\prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=0}^{n} k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Pour le troisième produit, remarquons que si $n \geqslant 3$, alors le terme $(3-3)$ apparaît dans le produit et celui-ci vaut 0. Il reste donc à calculer les cas $n=0$, $n=1$ et $n=2$.

- Si $n=0$, $\prod_{k=0}^{0}(3-k)=1$;
- Si $n=1$, $\prod_{k=0}^{1}(3-k)=3-1=2$;
- Si $n=2$, $\prod_{k=0}^{2}(3-k)=(3-1)(3-2)=2$;
- Sinon, $\prod_{k=0}^{n}(3-k)=0$;

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Non, celle-là, j'ai un peu la flemme dans l'immédiat.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}1\right)=\sum_{i=1}^{n}n=n\times n=n^2.$$

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}i\right)=\sum_{i=1}^{n}ni=n\sum_{i=1}^{n}i=n\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Par linéarité,

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)=\sum_{1\leq i,j\leq n}i+\sum_{1\leq i,j\leq n}j.$$

Les deux sommes sont identiques (symétrie $i\leftrightarrow j$), chacune vaut $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$ (c'est en fait deux fois la somme précédente). Ainsi,

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)=2\cdot\frac{n^2(n+1)}{2}=n^2(n+1).$$

Pour la dernière somme, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}n^{i+j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}n^in^j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(n^i\sum_{j=1}^{n}n^j\right)=\sum_{j=1}^{n}n^j\times\sum_{i=1}^{n}n^i.$$

Ces deux sommes sont égales (rappelons que l'indice est muet) et on reconnaît là une somme géométrique. Si $n=1$, alors ces deux sommes valent 1 et donc $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 1}1^{i+j}=1$.

Sinon,

$$\sum_{j=1}^{n}n^j=\sum_{j=0}^{n}n^j-1=\frac{1-n^{n+1}}{1-n}-1=\frac{1-n^{n+1}-(1-n)}{1-n}=\frac{n-n^{n+1}}{1-n}.$$

et donc

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}n^{i+j}=\left(\frac{n-n^{n+1}}{1-n}\right)^2.$$

► Correction 20 – Voir l'énoncé

On a $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)\right)$.

Or, $\min(i,j)=\begin{cases} i & \text{si } i\leqslant j \\ j & \text{sinon.}\end{cases}$. On utilise alors la relation de Chasles.

$$\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)=\sum_{j=1}^{i}\min(i,j)+\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)=\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{n}i=\frac{i(i+1)}{2}+i(n-(i+1)+1).$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)=\frac{i(i+1)}{2}+(n-i)i=-\frac{i^2}{2}+\frac{(2n+1)i}{2}.$$

On a donc

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{i^2}{2}+\frac{(2n+1)i}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{(2n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}i.$$

Finalement,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=-\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

► Correction 21 – Voir l'énoncé

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}a_ib_j &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}a_ib_j\right) && \text{[par définition]}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{j=1}^{p}b_j\right) && \text{[Factorisation dans la deuxième somme]}\\
&= \sum_{j=1}^{p}b_j\times\sum_{i=1}^{n}a_i && \text{[La seconde somme ne dépend pas de } i\text{, on factorise.]}
\end{aligned}$$

► Correction 22 – Voir l'énoncé

On a

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}1=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}1\right)=\sum_{j=1}^{n}j=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) && \text{[par définition]}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2} && \text{[calcul de la somme intérieure]}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j && \text{[linéarité de la somme]}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4} && \text{[calcul des sommes]}\\
&= \frac{n(n+1)((2n+1)+3)}{12} && \text{[réduction au même dénominateur]}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+4)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} && \text{[simplification par 2]}
\end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, on a

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j.$$

La première de ces sommes a été calculée précédemment. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j = &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j\right) && \text{[par définition]}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 && \text{[calcul de la somme intérieure]}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{[somme usuelle]}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(3n+3)}{6}=\frac{n(n+1)^2}{2}.$$

Pour la dernière somme, il suffit de remarquer que puisque $i\leqslant j$, alors $i-j\leqslant 0$ et donc $|i-j|=j-i$. Ainsi,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|i-j|=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(j-i)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i.$$

D'après ce qui a été vu précédemment,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|i-j|=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$$

► Correction 23 – Voir l'énoncé

```python

def somme_1(n):
    S = 0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1, n+1):
            S = S + i ** j
    return S

def somme_2(n):
```

```
    S = 0
    for j in range(1,n+1):
        for i in range(1, j+1):
            S = S + i ** j
    return S
```

► Correction 24 – Voir l'énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{i=1}^{n} S_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k} \right) \\
&= \sum_{1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{k} && \text{[notation compacte]} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{k} \right) && \text{[interversion]} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{k} && \text{[calcul de la somme intérieure]} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k} && \text{[linéarité]} \\
&= (n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} 1 && \text{[factorisation et simplification]} \\
&= (n+1) S_n - n.
\end{aligned}$$

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Remarquons que $k = \sum_{i=1}^{k} 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k x^k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} 1 \right) x^k \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n}^{n} x^k && \text{[notation compacte]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} x^k \right) && \text{[interversion des somme]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i - x^{n+1}}{1-x} && \text{[voir exercice 4, somme numéro 6]} \\
&= \frac{1}{1-x} \left(\sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^{n+1} \right) && \text{[linéarité]} \\
&= \frac{1}{1-x} \left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x} - n x^{n+1} \right) && \text{[calcul des sommes]} \\
&= \frac{1}{1-x} \times \frac{x - x^{n+1} - (1-x) n x^{n+1}}{1-x} && \text{[mise au même dénominateur]} \\
&= \frac{x - (1+n) x^{n+1} + n x^{n+2}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$