Systèmes linéaires

1 Définitions et propriétés

1.1 Définitions

Définition 1 — Système linéaire : Soient n et p deux nombres entiers non nuls.

Un **système d'équations linéaires** de n équations à p inconnues est un système de la forme

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \quad (L_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \quad (L_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \quad (L_n) \end{array} \right.$$

où les $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et les $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des nombres réels, et $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des inconnues.

Le réel a_{ij} est le **coefficient** de la $j^{\text{ème}}$ inconnue x_j dans la $i^{\text{ème}}$ équation (L_i).

R Si $n = p$ le système (S) est carré d'ordre n.

■ **Exemple 1 :** Le système

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 \quad (L_1) \\ 3x_1 & + & x_2 & = & -2 \quad (L_2) \end{array} \right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues. C'est ainsi un système carré d'ordre 2.

Le système

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \quad (L_1) \\ 3x & + & y & & & = & -2 \quad (L_2) \end{array} \right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

1.2 Propriétés

Définition 2 — Résolution, système incompatible : Soit

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \quad (L_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \quad (L_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \quad (L_n) \end{array} \right.$$

- **Résoudre** le système (S) signifie trouver toutes les réels $x_1, \dots, x_p$ vérifiant les n équations $(L_1), \dots, (L_n)$.
- Un système qui n'admet pas de solutions est dit **incompatible**.

R Dans le cas où $p < n$, il y a plus d'équations que d'inconnues. Soit certaines équations sont redondantes (et peuvent donc être supprimées), soit le système est incompatible. Par conséquent dans la suite du cours seul le cas $n \leqslant p$ sera étudié.

Définition 3 — Systèmes équivalents : Deux systèmes (S) et (S') sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

On note $(S) \Leftrightarrow (S')$ pour signifier que les systèmes (S) et (S') sont équivalents.

■ **Exemple 2 :** Les systèmes suivants sont équivalents

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 3x & - & 2y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 2y & = & 2 \\ 3x & - & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Définition 4 — Système homogène : Soit

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

Le système (S) est dit **homogène** (ou **sans second membre**) si $b_1 = \dots = b_n = 0$.

Dans ce cas, la p-liste $(0,\dots,0)$ est toujours solution du système (S).

Le **système homogène associé** au système (S) est le système obtenu à partir de (S) en remplaçant tous les réels b_i par 0. On le note souvent (S_H) ou (S_0).

■ **Exemple 3 :** .

Le système homogène associé au système (S) : $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 3x & - & 2y & = & 2 \end{array}\right.$ est (S_0) : $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ 3x & - & 2y & = & 0 \end{array}\right.$

1.3 Résolution par substitution

Méthode 1 : La méthode par résolution par substitution consiste à...

- ... écrire une des inconnues (par exemple x_1) en fonction des autres $(x_2, x_3, \dots)$,
- ... remplacer cette inconnue x_1 dans toutes les autres équations en fonction de $x_2, x_3, \dots$.

On itère alors le procédé avec les variables restantes, autant de fois que nécessaire.

Cette méthode est efficace lorsqu'il y a peu d'inconnues ou d'équations.

■ **Exemple 4 :** Nous allons résoudre le système suivant :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & 1 \quad (L_1) \\ -3x & + & y & = & 2 \quad (L_2) \end{array}\right.$$

En utilisant (L_2), nous exprimons y en fonction de x : $y = 3x + 2$.

On injecte alors cette égalité dans (L_1) pour en déduire la valeur de x. Après cela on obtient la valeur de y.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & 1 \\ & & y & = & 3x+2 \end{array}\right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3(3x+2) = 1 \\ y = 3x+2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -7x = 7 \\ y = 3x+2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3\times(-1)+2 = -1 \end{cases}$$

Ainsi, le système (S) admet une unique solution : $(-1;-1)$.

1.4 Systèmes triangulaires

Les système triangulaires sont les plus simples des systèmes et ils se résolvent très facilement.

Définition 5 — Système triangulaire : Le système

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

est **triangulaire** si

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,p]\!],\ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Ainsi, si $n < p$, le système est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{nn}x_n + \dots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Si $n = p$, on a alors le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + \dots + a_{2n}x_n = b_n & (L_2) \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Les coefficients diagonaux $a_{11},\dots,a_{nn}$ sont appelés les **pivots** du système.

R Lorsque $n = p$ et que tous les pivots a_{ii} (pour $i \in [\![1;n]\!]$) sont non nuls, le système se résout par substitutions successives, de (L_n) à (L_1). Il y a alors une **unique n-liste solution**.

♥ **Méthode 2 :** Dans le cas $n < p$, il y a une ou plusieurs inconnues en trop.

Il convient donc de choisir $p-n$ inconnues comme inconnues auxiliaires, autrement dit comme paramètres et puis de résoudre le système comme pour le cas $n = p$.

■ **Exemple 5 :** Nous allons résoudre le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & -1 \\ & & 2y & - & 4z & = & 2 \end{array} \right.$$

On remarque qu'il y a 3 inconnues pour 2 équations. Exprimons alors x et y en fonction de z qui devient un paramètre.

$$\begin{array}{rl} (S) & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & -1+3z \\ & & 2y & = & 2+4z \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & (1+2z) & = & -1+3z \\ & & y & = & 1+2z \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & & & = & -z \\ & & y & = & 1+2z \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2}z \\ y & = & 1+2z \end{array} \right. \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}z ; 1+2z ; z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$.

R Si nous avions choisi une autre inconnue auxiliaire, le résultat n'aurait pas été sous la même forme. Cependant il désignerait bien le même ensemble de solutions.

2 Pivot de Gauss-Jordan

2.1 Opérations élémentaires

Définition 6 — Opération élémentaire : Soit (S) un système à n équations et p inconnues. Une **opération élémentaire** est l'une des trois opérations suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$: **échange** de la $i^{\text{ième}}$ ligne L_i et de la $j^{\text{ième}}$ ligne L_j.
- $L_i \leftarrow aL_i$ où $a \neq 0$: **remplacement** de la $i^{\text{ième}}$ ligne par elle même **multipliée** par un nombre non nul a. Lorsque la ligne L_i comporte des fractions, cette règle permet d'enlever les dénominateurs.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ où b est quelconque : **remplacement** de la $i^{\text{ième}}$ ligne par la **somme** d'elle même et d'un multiple d'une autre ligne. Cette règle permet d'éliminer une inconnue sur la ligne L_i.

R En combinant la deuxième et la troisième opérations élémentaires, l'opération $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ où a est non nul, et b est quelconque est utilisable.

Théorème 1 — Stabilité et opération élémentaire : Tout système obtenu à partir d'un système (S) en transformant l'une de ses équations par une opération élémentaire est équivalent à (S) et a donc le même ensemble de solutions.

Il découle de ce théorème que

Propriété 1 — Suppression des redondances : Si un système possède deux lignes identiques, il est équivalent au système dans lequel l'une de ces deux lignes a été enlevée.

2.2 Pivot de Gauss-Jordan

Méthode 3 : En utilisant les opérations élémentaires mentionnées ci-dessus, nous résolvons un système (S) par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

Le principe de la méthode est

1. d'éliminer successivement des inconnues via les opérations élémentaires, pour transformer le système initial en un système triangulaire;
2. de résoudre le système triangulaire par substitutions.

■ **Exemple 6 :** On considère le système suivant

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 & (L_1) \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & (L_2) \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 & (L_3) \end{array} \right.$$

L'inconnue x de la première équation sera notre premier pivot, nous allons donc utiliser les opérations élémentaires pour l'éliminer dans les lignes suivantes.

Ainsi,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{x} & + & 2y & + & 3z & = & 2 & (L_1) \text{ inchangée} \\ & - & 5y & - & 7z & = & -5 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ & - & y & - & 5z & = & -4 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array} \right.$$

Notre deuxième pivot sera alors l'inconnue y de la deuxième ligne. Nous l'éliminons alors cette inconnue de la troisième ligne en appliquant l'opération élémentaire $(L_3 \leftarrow 5L_3 - L_2)$. Ainsi,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 & (L_1) \\ & & \boxed{-5y} & - & 7z & = & -5 & (L_2) \\ & & & - & 18z & = & -15 & (L_3 \leftarrow 5L_3 - L_2) \end{array} \right.$$

Le système est à présent triangulaire avec tous ses pivots non nuls : on remonte celui-ci par substitutions pour obtenir une unique solution à notre système.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & - & 5y & - & 7z & = & -5 \\ & & & & z & = & \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \end{array} \right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & & y & & & = & \frac{-5+7\times\frac{5}{6}}{-5} = -\frac{1}{6} \\ & & & & z & = & \frac{5}{6} \end{array} \right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 - 2\times\left(-\frac{1}{6}\right) - 3\times\frac{5}{6} = -\frac{1}{6} \\ y & = & -\frac{1}{6} \\ z & = & \frac{5}{6} \end{array} \right.$$

Le système (S) admet pour unique solution le triplet $\left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

■ **Exemple 7 :** On considère le système suivant

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & (L_1) \\ 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & (L_2) \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 & (L_3) \\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 & (L_4) \end{array} \right.$$

Il ne faut pas hésiter à échanger les lignes pour avoir une ligne pivot pratique.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & (L_2) \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 & (L_3) \\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 & (L_4) \end{array} \right.$$

On utilise alors l'inconnue x de la première ligne comme pivot.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} \boxed{2x} & + & 2y & - & z & & & = & 0 & (L_1) \text{ inchangé} \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & (L_2) \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1) \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 0 & (L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1) \end{array} \right.$$

Les deux dernières lignes sont identiques, il est donc possible d'en supprimer une tout en conservant un système équivalent. On peut éventuellement ajouter une ligne pour rappeler l'inconnue auxiliaire, mais ce n'est pas nécessaire.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & (L_1) \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & (L_2) \\ & & & - & 9z & - & 28t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2) \\ & & & & & & t & = & t & (L_4) \end{array} \right.$$

Le système est désormais triangulaire. On le résout en utilisant la variable auxiliaire t.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \\ & & & & z & & & = & -\frac{28}{9}t \\ & & & & & & t & = & t \end{array} \right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 \\ & & y & & & & & = & 2 \times \left(-\frac{28}{9}t\right) + 3t = -\frac{29}{9}t \\ & & & & z & & & = & -\frac{28}{9}t \\ & & & & & & t & = & t \end{array} \right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}\left(-2 \times \left(-\frac{29}{9}t\right) + \left(-\frac{28}{9}t\right)\right) = \frac{15}{9}t \\ y & = & -\frac{29}{9}t \\ z & = & -\frac{28}{9}t \\ t & = & t \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de (S) est $\left\{ \left(\frac{15}{9}t\,;\, -\frac{29}{9}t\,;\, -\frac{28}{9}t\,;\, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$.

■ **Exemple 8 :** On considère le système suivant

$$(S) : \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 & (L_1) \\ -y + 2z + 3t = 0 & (L_2) \\ 3x - y + 2z - 2t = 0 & (L_3) \\ 5x + y + z - 2t = 1 & (L_4) \end{cases}$$

Le système est presque le même que le précédent, seule la dernière ligne est modifiée. On applique alors la même méthode que précédemment.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x} + 2y - z = 0 & (L_1) \text{ inchangé} \\ -y + 2z + 3t = 0 & (L_2) \\ -8y + 7z - 4t = 2 & (L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1) \\ -8y + 7z - 4t = 0 & (L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1) \end{cases}$$

Il n'est pas possible de satisfaire à la fois (L_3) et (L_4). Le système est incompatible.

Le système (S) n'admet aucune solution.

R Un système linéaire admet nécessairement :

- aucune solution (il est donc incompatible) ;
- une unique solution ;
- une infinité de solutions (quand il y a une ou des inconnues auxiliaires).

2.3 Rang d'un système

Définition 7 — Rang : Soit (S) un système. Le **rang** du système, noté $\text{rg}(S)$ est le nombre de pivots non nuls (ou d'équations non nulles) après application de la méthode du pivot de Gauss au système homogène associé à (S).

■ **Exemple 9 :** Soit (S) le système

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Nous appliquons la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \text{ ligne pivot} \\ -5y - 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 5y + 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \\ -5y - 3z = 0 & L_2 \text{ ligne pivot} \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Le système est triangulaire, et il y a 2 pivots non nuls. Le rang de (S) est alors 2.

3 Systèmes de Cramer

3.1 Définition

Définition 8 — Systèmes de Cramer : Un système carré d'ordre n est dit **de Cramer** s'il possède une unique solution.

R Un système homogène (S) de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si son unique solution est $(0,0,\dots,0)$.

3.2 Systèmes de Cramer et pivot de Gauss

Théorème 2 — Système Triangulaire de Cramer : Un système (S) carré d'ordre n est de Cramer si et seulement si la méthode du pivot de Gauss fait apparaitre n pivots non-nuls.

■ **Exemple 10 :** Le système suivant est de Cramer

$$(S) : \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$$

En effet en appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
(S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -3y+5z=0 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ -y+2z=0 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -y+2z=0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ -3y+5z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -y+2z=0 \\ -z=0 & L_3 \leftarrow L_3-3L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les pivots sont donc 1, -1 et -1 qui sont tous les trois non nuls : le système (S) est donc bien de Cramer.

Le théorème 2 peut être réécrit en utilisant la notion de rang.

Théorème 3 : Un système carré (S) d'ordre $n \geq 1$ est de Cramer si et seulement si $\operatorname{rg}(S) = n$.

3.3 Système de Cramer et système homogène associé

Théorème 4 — Système de Cramer : Un système (S) est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est aussi de Cramer.

Démonstration 5 : En effet, le choix des pivots dans la méthode des pivots de Gauss ne dépend pas du second membre. □

Méthode 4 : Pour montrer qu'un système quelconque est de Cramer, il suffit donc de montrer que son système homogène associé l'est, ce qui est plus simple.

■ **Exemple 11 :** D'après l'exemple précédent, le système suivant est de Cramer. Celui-ci admet donc une unique solution.

$$(S) \ : \ \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+\ \ z=8 \\ 2x+y-2z=5 \end{cases}$$