Systèmes linéaires

1 Résolution de systèmes

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1) : \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-5y=1 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 5x+\ \ y+1=2x-y+3 \\ 7x+5y\qquad =x+y-1 \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} 9x-2y=1 \\ -3x+5y=5 \end{cases}$$

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

Résoudre les systèmes triangulaires suivants.

$$(S_1) : \begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ \qquad 3y-2z=2 \\ \qquad\qquad 4z=3 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 2x+4y\qquad =1 \\ \qquad 3y\qquad =5 \\ 5x-\ \ y-z=1 \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} x+y+\ \ z+\ \ t=0 \\ \qquad y+2z-\ \ t=0 \\ \qquad\qquad 3z-2t=0 \end{cases}$$

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1) : \begin{cases} x+\ \ y+2z=3 \\ x+2y+\ \ z=1 \\ 2x+\ \ y+\ \ z=0 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x\qquad +2z=1 \\ -\ \ y+\ \ z=2 \\ x-2y\qquad =1 \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} \qquad y-z\quad =1 \\ 2x+y+z\quad =3 \\ x\qquad +z\quad =1 \end{cases}$$

$$(S_4) : \begin{cases} 2x-\ \ y+3z\quad =1 \\ -4x+2y+\ \ z\quad =3 \\ 10x-5y-6z\quad =-10 \end{cases} \qquad (S_5) : \begin{cases} 2x-y+\ \ z=3 \\ x\qquad +2z=-1 \\ x-y-\ \ z=2 \end{cases} \qquad (S_6) : \begin{cases} 2x-\ \ y-\ \ z\quad =1 \\ -4x-\ \ y+\ \ z\quad =3 \\ 10x-5y-6z\quad =-10 \end{cases}$$

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1) : \begin{cases} -3x+\ \ y+\ \ z+\ \ t=0 \\ x-3y+\ \ z+\ \ t=0 \\ x+\ \ y-3z+\ \ t=0 \\ x+\ \ y+\ \ z-3t=0 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x-\ \ y+\ \ z+\ \ t=0 \\ 3x-3y+3z+2t=0 \\ x-\ \ y+\ \ z\qquad =0 \\ 5x-5y+5z+7t=0 \end{cases}$$

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Résoudre le système suivant, où x, y et z sont des réels positifs.

$$(S) : \begin{cases} x^3y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{12} & = & 2 \\ x^2y^2z^5 & = & 3 \end{cases}$$

Indication : penser au logarithme ...

2 Systèmes avec paramètres

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. Déterminer, selon les valeurs de a et b, l'ensemble des solutions du système suivant :

$$(S) \ : \ \begin{cases} x+ay=b \\ ax+\ \ y=b \end{cases}$$

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Soit m un réel. Déterminer, selon les valeurs de m, le rang du système suivant

$$(S) \ : \ \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & my & + & 4z & = & 8-m \\ -x & - & my & + & (m^2-3m-2)z & = & 2m-4 \end{array} \right. .$$

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

Soit m un réel. Déterminer, selon la valeur de m, l'ensemble des solutions du système suivant :

$$(S) \ : \ \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1-m \\ mx & + & (1-m)y & + & (1-m)z & = & m^2 \\ mx & + & (1+m)y & + & (1+m)z & = & m-m^2 \end{array} \right. .$$

3 Quelques applications

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

Déterminer l'ensemble des fonctions polynômes du second degré $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ qui vérifient $f(1)=3$, $f(2)=5$ et $f(-1)=1$

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

Déterminer l'ensemble des fonctions polynômes du second degré $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ qui vérifient $f(2)=4$, $f(3)=8$.

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1,2\}$, on ait

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.$$

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,1\}$, on ait

$$\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

Corrections

► Correction 1 – Voir l'énoncé

(S_1) admet une unique solution qui est $\left(\frac{23}{19};\frac{10}{19}\right)$.

$$\begin{aligned}(S_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=2 & (L_1)\\ 6x+4y=-1 & (L_2)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y \quad =2 \\ \qquad\qquad 0=-5 & (L_2 \leftarrow L_2-2L_1)\end{cases}\end{aligned}$$

Le système (S_2) n'admet aucune solution.

(S_3) admet une unique solution qui est $\left(\frac{5}{13};\frac{16}{13}\right)$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

(S_1) admet une unique solution qui est $\left(-\frac{1}{8};\frac{7}{6};\frac{3}{4}\right)$.

Pour (S_2), le mieux est de réécrire le système pour obtenir un système triangulaire.

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -z+5x-\ \ y=1\\ \qquad 2x+4y=1\\ \qquad\qquad 3y=5\end{cases}.$$

On trouver alors que (S_2) admet une unique solution qui est $\left(-\frac{17}{6};\frac{5}{3};-\frac{101}{6}\right)$.

Pour (S_3), on a

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\ \ z+t=0\\ \quad y+2z-t=0\\ \qquad z \quad =2t/3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2t/3+t &= 0\\ y+2\times 2t/3-t &= 0\\ z &= 2t/3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-t/3+2t/3+t &= 0\\ y &= -t/3\\ z &= 2t/3\end{cases}$$

et donc

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -4t/3\\ y &= -t/3\\ z &= 2t/3\end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_3) est $\left\{\left(-\frac{4t}{3};-\frac{t}{3};\frac{2t}{3};t\right), t\in\mathbb{R}\right\}$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

On a

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+\ \ y+2z=3\\ x+2y+\ \ z=1\\ 2x+\ \ y+\ \ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=3 & (L_1 \text{ pivot})\\ \quad y-\ \ z=-2 & (L_2 \leftarrow L_2-L_1)\\ -y-3z=-6 & (L_3 \leftarrow L_3-2L_1)\end{cases}$$

puis

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=3 & (L_1) \\ \quad y-\ z=-2 & (L_2 \text{ pivot}) \\ \quad\quad -4z=-8 & (L_3 \leftarrow L_3+L_2) \end{cases}$$

Ainsi,

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=3 \\ \quad y-\ z=-2 \\ \quad\quad z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z \quad =3 \\ \quad y \quad -2=-2 \\ \quad\quad z \quad =2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=3 \\ \quad y \quad =0 \\ \quad\quad z=2 \end{cases}$$

et finalement,

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +0+2\times 2=3 \\ \quad y \quad =0 \\ \quad\quad z \quad =2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

Le système (S_1) admet pour unique solution $(-1;0;2)$.

On a

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +2z=1 \\ -\ y+\ z=2 \\ x-2y \quad =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +2z=1 & (L_1 \text{ pivot}) \\ -\ y+\ z=2 & (L_2) \\ -2y-2z=0 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \end{cases}$$

Ainsi,

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +2z=1 & (L_1) \\ -y+\ z=2 & (L_2 \text{ pivot}) \\ \quad -4z=-4 & (L_3 \leftarrow L_3-2L_2) \end{cases}.$$

En résolvant ce système triangulaire, on trouve que le système (S_2) admet pour unique solution le triplet $(-1;-1;1)$.

On a

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \quad y-z \quad =1 \\ 2x+y+z \quad =3 \\ x \quad +z \quad =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z \quad =3 \\ \quad y-z \quad =1 \\ x \quad +z \quad =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z \quad =3 & (L_1 \text{ pivot}) \\ \quad y-z \quad =1 & (L_2) \\ -y+z \quad =-1 & (L_3 \leftarrow 2L_3-L_1) \end{cases}.$$

Ainsi,

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z \quad =3 & (L_1) \\ \quad y-z \quad =1 & (L_2 \text{ pivot}) \\ \quad 0=0 & (L_3 \leftarrow L_3+L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z \quad =3 \\ \quad y-z \quad =1 \end{cases}.$$

Finalement,

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z &= 3 \\ y &= 1+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= 3-y-z \\ y &= 1+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= 3-(1+z)-z \\ y &= 1+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1-z \\ y &= 1+z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_3) est $\{(1-z;1+z;z), z \in \mathbb{R}\}$.

On a

$$(S_4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 & (L_1 \text{ pivot} \\ 7z = 5 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ -21z = -15 & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \end{cases}$$

Ainsi,

$$(S_4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ z = 5/7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(1 + y - 3 \times \frac{5}{7}\right) \\ z = 5/7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} - \frac{4}{7} \\ z = 5/7 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_4) est $\left\{\left(\frac{y}{2} - \frac{4}{7}; y; \frac{5}{7}\right), y \in \mathbb{R}\right\}$.

On a

$$(S_5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2z = -1 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 3 & (L_1 \text{ pivot}) \\ y + 3z = -5 & (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) \\ -y - 3z = 1 & (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1) \end{cases}$$

et donc

$$(S_5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 3 & (L_1) \\ y + 3z = -5 & (L_2 \text{ pivot}) \\ 0 = -4 & (L_3 \leftarrow L_2 + L_3) \end{cases}$$

Le système (S_5) n'admet pas de solution.

On a

$$(S_6) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -4x - y + z = 3 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (L_1 \text{ pivot}) \\ -3y - z = 5 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ -z = -15 & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \end{cases}$$

On a directement un système triangulaire que l'on peut résoudre pour trouver comme unique solution au système (S_6) le triplet $\left(\frac{14}{3}; -\frac{20}{3}; 15\right)$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

On a

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + z + t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \\ x + y + z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + z + t = 0 & (L_1 \text{ pivot}) \\ -8y + 4z + 4t = 0 & (L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1) \\ 4y - 8z + 4t = 0 & (L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1) \\ 4y + 4z - 8t = 0 & (L_4 \leftarrow 3L_4 + L_1) \end{cases}.$$

Les trois dernières lignes sont simplifiables par 4. On a alors.

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+\ \ y+\ \ z+\ \ t=0 \\ \quad -2y+\ \ z+\ \ t=0 \\ \quad\quad y-2z+\ \ t=0 \\ \quad\quad y+\ \ z-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+\ \ y+\ \ z+\ \ t=0 & (L_1) \\ \quad -2y+\ \ z+\ \ t=0 & (L_2 \text{ pivot}) \\ \quad\quad -3z+3t=0 & (L_3 \leftarrow 2L_3+L_2) \\ \quad\quad 3z-3t=0 & (L_4 \leftarrow 2L_4+L_2) \end{cases}.$$

Ainsi,

$$(S_4) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+\ \ y+z+t & =0 & (L_1) \\ \quad -2y+z+t & =0 & (L_2) \\ \quad\quad -z+t & =0 & (L_3 \text{ pivot}) \\ \quad\quad\quad 0 & =0 & (L_4 \leftarrow L_3+L_4) \end{cases}.$$

On aboutit alors à un système triangulaire.

$$(S_4) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x+y+z+t & = & 0 \\ -2y+z+t & = & 0 \\ -z+t & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x+y+t+t & = & 0 \\ -2y+t+t & = & 0 \\ z & = & t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x+t+t+t & = & 0 \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de (S_1) est $\{(t;t;t;t), t \in \mathbb{R}\}$.

On a

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-\ \ y+\ \ z+\ \ t=0 \\ 3x-3y+3z+2t=0 \\ x-\ \ y+\ \ z\quad\ \ =0 \\ 5x-5y+5z+7t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+x-y+z=0 & (L_1 \text{ pivot}) \\ -t\quad\quad\quad\quad =0 & (L_2 \leftarrow L_2-3L_1) \\ -t\quad\quad\quad\quad =0 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \\ 2t\quad\quad\quad\quad =0 & (L_4 \leftarrow L_4-5L_1) \end{cases}.$$

Ainsi,

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z+t & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y-z \\ t & = & 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de (S_2) est $\{(y-z;y;z;0), y,z \in \mathbb{R}\}$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

D'abord, notons qu'il n'est pas possible que l'un des réels x, y ou z soit nul.

Puisque x, y et z sont des réels strictement positifs, on pose $a=\ln(x)$, $b=\ln(y)$ et $c=\ln(z)$.

On a alors $x=\mathrm{e}^a$, $y=\mathrm{e}^b$ et $z=\mathrm{e}^c$. Ainsi,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (\mathrm{e}^a)^3(\mathrm{e}^b)^2(\mathrm{e}^c)^6 & = & 1 \\ (\mathrm{e}^a)^4(\mathrm{e}^b)^5(\mathrm{e}^c)^{12} & = & 2 \\ (\mathrm{e}^a)^2(\mathrm{e}^b)^2(\mathrm{e}^c)^5 & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{3a+2b+6c} & = & 1 \\ \mathrm{e}^{4a+5b+12c} & = & 2 \\ \mathrm{e}^{2a+2b+5c} & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3a+2b+6c & = & 0 \\ 4a+5b+12c & = & \ln(2) \\ 2a+2b+5c & = & \ln(3) \end{array} \right.$$

On retrouve donc un système linéaire classique, que l'on s'empresse de résoudre.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+\ \ 6c=0 & (L_1 \text{ pivot}) \\ \quad 7b+12c=3\ln(2) & (L_2 \leftarrow 3L_2-4L_1) \\ \quad 2b+\ \ 3c=3\ln(3) & (L_3 \leftarrow 3L_3-2L_2) \end{cases}$$

puis

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+\ \ 6c=0 & (L_1) \\ \qquad 7b+12c=3\ln(2) & (L_2 \text{ pivot}) \\ \qquad\quad -\ \ 3c=21\ln(3)-6\ln(2) & (L_3 \leftarrow 7L_3-2L_2) \end{cases}$$

On a alors un système triangulaire que l'on résout, et on trouve alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2\ln(2)+6\ln(3) \\ b=-3\ln(2)+12\ln(3) \\ c=2\ln 2)-7\ln(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2^{-3}3^6 \\ y=2^3 3^{12} \\ z=2^2 3^{-7} \end{cases}$$

► Correction 6 – Voir l'énoncé

On a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay=b \\ ax+\ \ y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay &= b & (L_1) \\ (1-a^2)y &= b(1-a) & (L_2 \leftarrow L_2-aL_1) \end{cases}$$

Si $a \neq -1$ et $a \neq 1$, alors $1-a^2 \neq 0$ et on peut donc diviser par $1-a^2$. Ainsi,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay &= b \\ y &= \dfrac{b(1-a)}{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay &= b \\ y &= \dfrac{b(1-a)}{(1-a)(1+a)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay &= b \\ y &= \dfrac{b}{(1+a)} \end{cases}$$

Finalement,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{ab}{1+a} &= b \\ y &= \dfrac{b}{(1+a)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{b}{1+a} \\ y &= \dfrac{b}{(1+a)} \end{cases}$$

Ainsi, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, le système admet une unique solution qui est le couple $\left(\dfrac{b}{1+a};\dfrac{b}{1+a}\right)$.

Si $a=1$, le système devient

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \quad =b \\ \qquad 0=0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc $\{(b-y,y), y \in \mathbb{R}\}$.

Si $a=-1$, le système devient

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \quad =b \\ \qquad 0=2b \end{cases}$$

Si alors $b \neq 0$, ce système n'admet pas de solution. Si en revanche, $b=0$, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(y;y), y \in \mathbb{R}\}$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x & & + & 2z & = & 4 & (L_1 \text{ pivot}) \\ & my & & & = & -m & (L_2 \leftarrow L_2-2L_1) \\ & -\ \ my & + & (m^2-3m)z & = & 2m & (L_3 \leftarrow L_3+L_1) \end{cases}$$

puis

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & + & 2z & = & 4 & (L_1) \\ & my & & & = & -m & (L_2 \text{ pivot}) \\ & & & m(m-3)z & = & m & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array} \right.$$

Ainsi, si $m \neq 0$ et $m \neq 3$, ce système est triangulaire et ses pivots sont non nuls, celui-ci est donc de rang 3.

Si $m = 3$, la dernière ligne devient $0 = 3$, le système n'admet donc pas de solution.

Si $m = 0$, les deux dernière lignes deviennent $0 = 0$. Le système est donc équivalent à $x + 2z = 4$ et est donc de rang 1.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

On a

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 1-m & (L_1 \text{ pivot}) \\ & & (1-2m)y & + & (1-2m)z & = & 2m^2-m & (L_2 \leftarrow L_2 - mL_1) \\ & & y & + & z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - mL_1) \end{array} \right.$$

Inversons alors les deux dernières lignes pour s'assurer d'un pivot non nul en deuxième ligne. On a

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1-m \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & (1-2m)y & + & (1-2m)z & = & 2m^2-m \end{array} \right.$$

puis

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1-m & (L_1) \\ & & y & + & z & = & 0 & (L_2 \text{ pivot}) \\ & & & & 0 & = & 2m^2-m & (L_3 \leftarrow L_3 - (1-2m)L_2) \end{array} \right.$$

Ainsi, si $2m - m^2 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq 0$ et $m \neq \frac{1}{2}$, le système (S) est incompatible.

Si $m = 0$, on a alors,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x+y+z & = & 1 \\ y & = & -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S) est $\{(1;-z;z), z \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = \frac{1}{2}$, on a alors,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & \frac{1}{2} \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x+y+z & = & \frac{1}{2} \\ y & = & -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{2} \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S) est $\left\{ \left(\frac{1}{2}; -z; z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Soit f une telle fonction. On a alors $f(1) = a + b + c$, $f(2) = 4a + 2b + c$ et $f(-1) = a - b + c$. On est donc amené à résoudre le système.

$$(S) \ : \ \left\{ \begin{array}{l} a + \ \ b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ a - \ \ b + c = 1 \end{array} \right.$$

Or,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+\ \ b+\ \ c=3 & (L_1 \text{ pivot}) \\ \ \ -2b-3c=-7 & (L_2 \leftarrow L_2-4L_1) \\ \ \ -2b\qquad =-2 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \end{cases}$$

La résolution de ce système donne alors $b=1$, $c=\frac{5}{3}$ et $a=\frac{1}{3}$.

Réciproquement, on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2+x+\frac{5}{3}$. On a alors

- $f(1)=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}=3$;
- $f(2)=\frac{1}{3}\times 4+2+\frac{5}{3}=5$;
- $f(-1)=\frac{1}{3}\times 1-1+\frac{5}{3}=1$.

L'unique solution au problème est donc la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2+x+\frac{5}{3}$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Soit f une telle fonction. On a alors $f(2)=4a+2b+c$ et $f(3)=9a+3b+c$. On est donc amené à résoudre le système

$$(S)\ :\ \begin{cases} 4a+2b+c=4 \\ 9a+3b+c=8 \end{cases}$$

Or,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=4 & (L_1) \\ 5a+\ \ b\qquad =4 & (L_2 \leftarrow L_2-L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \qquad c=6a-4 \\ b\qquad =4-5a \end{cases}$$

Réciproquement, soit a un réel. On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2+(4-5a)x+6a-4$; On a alors

- $f(2)=4a+(4-5a)\times 2+6a-4=4a+8-10a+6a-4=4$;
- $f(3)=9a+(4-5a)\times 3+6a-4=9a+12-15a+6a-4=8$.

L'ensemble des solutions au problème est l'ensemble des fonctions $\{f : x \mapsto ax^2+(4-5a)x+6a-4, a \in \mathbb{R}\}$.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Soient a, b et c trois réels.Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1,2\}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2} &= \frac{a(x-1)(x-2)+b(x+1)(x-2)+c(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{ax^2-3ax+2a+bx^2-bx-2b+cx^2-c}{(x+1)(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2+(-3a-b)x+(2a-2b-c)}{(x+1)(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

On cherche donc a, b et c tels que, pour tout réel x, on ait

$$(a+b+c)x^2+(-3a-b)x+(2a-2b-c)=1$$

Pour cela, résolvons le système

$$(S)\ :\ \begin{cases} \ \ a+\ \ b+c=0 \\ -3a-\ \ b\qquad =0 \\ \ \ 2a-2b-c=1 \end{cases}$$

On a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+\ \ b+\ \ c=0 & (L_1 \text{ pivot}) \\ \quad 2b+3c=0 & (L_2 \leftarrow L_2+3L_1) \\ -4b-3c=1 & (L_3 \leftarrow L_3-2L_1) \end{cases}$$

puis

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+\ \ b+\ \ c=0 & (L_1) \\ \quad 2b+3c=0 & (L_2 \text{ pivot}) \\ \qquad 3c=1 & (L_3 \leftarrow L_3+2L_2) \end{cases}$$

On trouve alors $c=\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{1}{2}$ et $a=\dfrac{1}{6}$.

Réciproquement, on vérifie que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1,2\}$, on a bien

$$\frac{1}{6(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{3(x-2)}.$$

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Soit a, b et c trois réels. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2+b(x-1)(x+3)+c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2} \\ &= \frac{ax^2+6ax+9a+bx^2+2bx-3b+cx-c}{(x-1)(x+3)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2+(6a+2b+c)x+9a-3b-c}{(x-1)(x+3)^2} \end{aligned}$$

On cherche donc a, b et c tels que, pour tout réel x, on ait

$$(a+b)x^2+(6a+2b+c)x+9a-3b-c=5x^2+21x+22$$

Pour cela, résolvons le système

$$(S)\ :\ \begin{cases} a+\ \ b\qquad=5 \\ 6a+2b+c=21 \\ 9a-3b-c=22 \end{cases}.$$

On a alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+\quad b\qquad=5 & (L_1 \text{ pivot}) \\ \ -\ \ 4b+c=-9 & (L_2 \leftarrow L_2-6L_1) \\ -12b-c=-23 & (L_3 \leftarrow L_3-9L_1) \end{cases}$$

puis

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+\ \ b\qquad=5 & (L_1) \\ -4b+\ \ c=-9 & (L_2 \text{ pivot}) \\ \qquad -4c=4 & (L_3 \leftarrow L_3-9L_1) \end{cases}$$

On trouve alors $c=-1$, $b=2$ et $a=3$. Réciproquement, on vérifie que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$,

$$\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}.$$