# Généralités sur les suites

## 1 Notion de suite numérique

**Définition 1 :** Une suite numérique $u$ est une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$u : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array} \right.$$

- Les suites seront en général notées $u$, $(u_n)_{n\in A}$ ou $(u_n)$ ;
- L'image de $n$ par la suite $u$, aussi appelé terme de rang $n$, sera noté $u_n$.

Une suite peut-être définie de manière explicite : il est alors possible de calculer directement tous ses termes.

■ **Exemple 1 :** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = \dfrac{2^n}{1+n}$.

On a alors $u_0 = \dfrac{2^0}{1+0} = 1$, $u_1 = \dfrac{2^1}{1+1} = 1$, ..., $u_7 = \dfrac{2^7}{1+7} = \dfrac{2^7}{2^3} = 2^4 = 16$...

Une suite peut-être définie par une relation de récurrence : pour calculer un terme de cette suite, il faut alors utiliser le(s) terme(s) précédent(s).

■ **Exemple 2 :** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n - 1$. On a alors

- pour $n = 0$ : $u_{0+1} = 2u_0 - 0 - 1$ soit $u_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$ ;
- pour $n = 1$ : $u_{1+1} = 2u_1 - 1 - 1$ soit $u_2 = 2 \times 5 - 2 = 8$ ;
- pour $n = 2$ : $u_{2+1} = 2u_2 - 2 - 1$ soit $u_3 = 2 \times 8 - 3 = 13$.

■ **Exemple 3 :** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On a alors

- pour $n = 0$ : $u_{0+2} = u_{0+1} + u_0$ soit $u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2$ ;
- pour $n = 1$ : $u_{1+2} = u_{1+1} + u_1$ soit $u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$ ;
- pour $n = 2$ : $u_{2+2} = u_{2+1} + u_2$ soit $u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5$.

Il est possible de rencontrer des suites imbriquées, c'est-à-dire deux suites dont les termes dépendent l'une de l'autre.

■ **Exemple 4 :** On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies comme suit.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_n - 2v_n \end{cases}$$

On a alors

- $u_1 = u_0 + v_0 = 3 + 2 = 5$ et $v_1 = u_0 - 2v_0 = 3 - 2 \times 2 = -1$ ;
- $u_2 = u_1 + v_1 = 5 + (-1) = 4$ et $v_2 = u_1 - 2v_1 = 5 - 2 \times (-1) = 7$.

Enfin, il est possible de définir des suites de manière implicite. Nous étudierons ce mode de génération plus en détails dans un prochain chapitre.

■ **Exemple 5 :** Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $u_n$ l'unique solution sur $[0;1]$ de l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Il faudra alors s'assurer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi bien définie.

On a par exemple $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$...

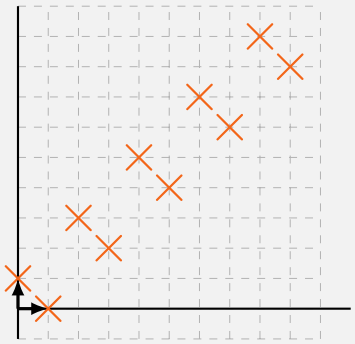
# 2 Représentation graphique d'une suite

**Définition 2 :** Soit $(u_n)$ une suite numérique. La représentation graphique d'une suite est l'ensemble des points de coordonnées $(n;u_n)$ dans un repère du plan.

R Si la suite est définie par une formule explicite $f$, il s'agit simplement de l'ensemble des points de la courbe représentative de $f$ dont les abscisses sont des entiers naturels.

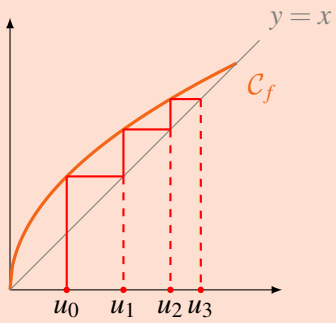
■ **Exemple 6 :** On considère la suite $(u_n)$ telle que, pour tout $n$, $u_n = n + (-1)^n$.

- $u_0 = 0 + (-1)^0 = 1$,
  on place le point de coordonnées $(0;1)$
- $u_1 = 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$,
  on place le point de coordonnées $(1;0)$
- $u_2 = 2 + (-1)^2 = 2 + 1 = 3$,
  on place le point de coordonnées $(2;3)$...



♥ **Méthode 1 :** Soit $f$ une fonction et $(u_n)$ une suite telle que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour représenter graphiquement la suite $(u_n)$, on pourra procéder ainsi :

- On trace la courbe représentative de $f$ et la droite d'équation $y = x$ ;
- On place la valeur de $u_0$ sur l'axe des abscisses ;
- On obtient $u_1$ en remarquant que $u_1 = f(u_0)$ ;
- On reporte horizontalement la valeur de $u_1$ sur la droite d'équation $y = x$, puis on reporte verticalement le point obtenu sur l'axe des ordonnées. De cette manière, on a placé $u_1$ sur l'axe des abscisses ;
- On reprendre les étapes précédentes avec $u_1$, puis $u_2$, etc.



# 3 Suites majorées, minorées, bornées

**Définition 3 — Suites majorées, minorées, bornées :** Soit $(u_n)$ une suite réelle. On dit que...

- ...$(u_n)$ est *majorée* s'il existe un réel $M$ tel que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant M$.
  Un tel réel $M$ est alors appelé *majorant* de la suite $(u_n)$.
- ...$(u_n)$ est *minorée* s'il existe un réel $m$ tel que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant m$.
  Un tel réel $m$ est alors appelé *minorant* de la suite $(u_n)$.
- ...$(u_n)$ est *bornée* si $(u_n)$ est à la fois majorée et minorée.

R Les majorants et minorants sont indépendants de $n$ ! Bien que pour tout $n > 0$, on ait $n \leqslant n^2$, on ne peut pas dire que la suite $(u_n)$ définie par $u_n = n$ est majorée. Cette indépendance se traduit dans l'ordre des quantificateurs employés dans la définition précédente (le majorant y apparaît avant l'entier $n$).

■ **Exemple 7 :** Pour tout $n$, on pose $u_n = (-1)^n$.

La suite $(u_n)$ est bornée puisque, pour tout entier $n$, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$.

■ **Exemple 8 :** Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = n^2 + 1$. La suite $(v_n)$ est minorée puisque pour tout entier naturel $n$, on a $v_n \geqslant 1$. En revanche, elle n'est pas majorée.

■ **Exemple 9 :** Pour tout entier naturel $n$, on pose $w_n = (-1)^n n$. Cette suite n'est ni majorée, ni minorée.

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, une majoration ou une minoration de cette suite peut elle-même être démontrée par récurrence.

■ **Exemple 10 :** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Cet exemple apporte toutefois une question : la suite $(u_n)$ est-elle bien définie ? En effet, la présence d'un logarithme invite à la méfiance, car nous ignorons si la quantité dans ce logarithme est bien strictement positive ou non. Nous allons donc intégrer, dans notre démonstration par récurrence, l'hypothèse que le terme de rang $n$ de la suite $(u_n)$ est bien défini.

Pour tout entier naturel $n$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n$ est bien défini et $u_n \geqslant 0$ ».

- **Initialisation** : $u_0 = 5$ et est donc bien défini. De plus, on a bien $u_0 \geqslant 0$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n$ est bien défini et $u_n \geqslant 0$.
  En ajoutant 1 à cette inégalité, on a donc $1 + u_n \geqslant 1$. On peut alors appliquer le logarithme népérien à $1 + u_n$, on en déduit donc que $u_{n+1}$ est bien défini. Par ailleurs, la fonction logarithme népérien étant croissante sur $[1;\infty[$, on a donc $\ln(1 + u_n) \geqslant \ln(1)$ et donc $u_{n+1} \geqslant 0$.
  $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathcal{P}$ est héréditaire.
  D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel $n$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est bien défini et $u_n \geqslant 0$.

Si l'on se donne une fonction $f$ définie sur un ensemble $I$ et une suite $(u_n)$ à valeurs dans $I$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$, l'étude de la fonction $f$ pourra également nous fournir des informations sur la suite $(u_n)$ étudiée.

■ **Exemple 11 :** On considère une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

On considère alors la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction $f$ étant définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit immédiatement que $u_n$ est bien défini pour tout entier $n$.

Pour tout entier naturel $n$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ ».

- **Initialisation** : On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
  La fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $[-1;3]$, lequel contient l'intervalle $[0;3]$. Il est alors possible d'appliquer cette fonction à notre inégalité (attention, la fonction étant décroissante, l'inégalité sera alors renversée).
  Ainsi, on a $f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(3)$. On sait par ailleurs que $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(3) = 0$.
  Enfin, d'après les variations de $f$, on sait également que $f(-1) \geqslant f(0)$, c'est-à-dire que $3 \geqslant f(0)$.
  Ainsi, $3 \geqslant f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(3)$, c'est-à-dire $3 \geqslant f(0) \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$.
  On en conclut en particulier que $3 \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathcal{P}$ est héréditaire.

  D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel $n$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Ainsi, pour tout entier naturel $n$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

# 4 Sens de variation d'une suite

## 4.1 Définitions

**Définition 4 :** Soit $(u_n)$ une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$

- On dit que $(u_n)$ est croissante à partir du rang $n_0$ si : $\forall n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant u_n$ ;
- On dit que $(u_n)$ est décroissante à partir du rang $n_0$ si : $\forall n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \leqslant u_n$ ;
- On dit que $(u_n)$ est constante à partir du rang $n_0$ si : $\forall n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n$.

R Si la suite est croissante à partir du rang 0, on ne précisera pas forcément ce rang...
Comme pour les fonctions, il existe des strictes croissances et décroissances de suite.

## 4.2 Comparaison des termes successifs

**Méthode 2 :** Pour étudier le sens de variation d'une suite, on pourra donc étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

■ **Exemple 12 :** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n$ par $u_n = 2n^2 + 5n - 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^2 + 5(n+1) - 3 - (2n^2 + 5n - 3) \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 - 3 - 2n^2 - 5n + 3 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 + 5 - 2n^2 \\ &= 4n + 7 \end{aligned}$$

Or, puisque $n$ est un entier naturel (donc positif), alors $4n + 7 > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, et donc $u_{n+1} > u_n$.

**Conclusion** : La suite $(u_n)$ est strictement croissante.

■ **Exemple 13 :** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

Pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$.

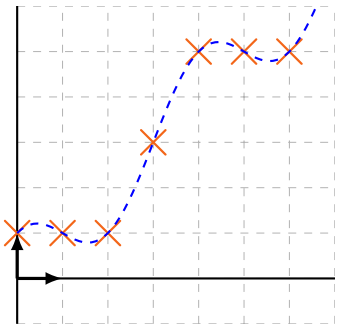
Ainsi, pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

**Conclusion** : La suite $(u_n)$ est décroissante.

**Propriété 1 :** Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et monotone sur $[n_0; +\infty[$.
La suite $(u_n)$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, est monotone à partir du rang $n_0$, de même monotonie que $f$.

**Démonstration 1 :** Supposons que la fonction $f$ est croissante sur $[n_0; +\infty[$. Soit $n \geqslant n_0$. Puisque $n \leqslant n + 1$, par croissance de $f$ sur $[n_0; +\infty[$, $f(n) \leqslant f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)$ est donc croissante.
La démonstration est analogue si $f$ est décroissante. □

**R** La réciproque est fausse ! La fonction $f$ représentée ci-dessous n'est pas monotone alors que la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = f(n)$ est croissante.



**Propriété 2 :** Soit $(u_n)$ une suite dont les termes sont tous **strictement positifs** et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- $(u_n)$ est croissante à partir du rang $n_0$ si et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- $(u_n)$ est décroissante à partir du rang $n_0$ si et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

**Démonstration 2 :** Puisque pour tout entier naturel $n$, on a $u_n > 0$, on peut multiplier l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ par $u_n$ sans en changer le sens. On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ si et seulement si $u_{n+1} \geqslant u_n$. □

■ **Exemple 14 :** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a bien $u_n > 0$ ;
- Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2n}{n+1}$.

Or, pour tout $n > 1$, on a $n+n > n+1$, c'est-à-dire $2n > n+1$, soit $\dfrac{2n}{n+1} > 1$.

Ainsi, pour tout $n > 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

**Conclusion** : La suite $(u_n)$ est donc croissante à partir du rang 1.

## 4.3 Cas des suites définies par récurrence

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, ses variations peuvent également être étudiées par récurrence.

■ **Exemple 15 :** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5+u_n}$.

Pour tout entier naturel $n$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n$ et $u_{n+1}$ sont bien définis et $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

- **Initialisation :** On a $u_0 = 4$, $u_1 = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$. Ainsi, $u_0$ et $u_1$ sont bien définis et on a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

  En ajoutant 5 à chaque membre, on obtient

  $$5 \leqslant u_{n+1} + 5 \leqslant u_n + 5.$$

  On peut donc bien calculer la racine carrée de $u_{n+1}+5$. Ainsi $u_{n+2}$ est bien défini.
  Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$, l'appliquer ne changera pas le sens de l'inégalité. On a donc bien

  $$\sqrt{5} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+5} \leqslant \sqrt{u_n+5}.$$

  D'une part, $\sqrt{5} \geqslant 0$. D'autre part, $\sqrt{u_{n+1}+5} = u_{n+2}$ et $\sqrt{u_n+5} = u_{n+1}$. Ainsi,

  $$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

  La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire.

  D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel $n$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ : la suite $(u_n)$ est donc décroissante et minorée par 0.

Comme précédemment, si l'on dispose d'une fonction $f$ que l'on sait étudier et d'une suite $(u_n)$ telle que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$, il est sans doute possible d'utiliser les informations que nous avons sur la fonction pour en déduire des informations sur notre suite.

**Attention ! Ce n'est pas parce que la fonction $f$ est croissante que la suite le sera également !**

■ **Exemple 16 :** On considère une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | |

On considère alors la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction $f$ étant définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit immédiatement que $(u_n)$ est bien définie.

On souhaite montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et bornée par $-1$ et $5$. Pour tout entier naturel $n$, on considère alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 3$ et $u_1 = f(u_0) = f(3) = 2$. On a bien $-1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 5$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$.
  La fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[-1;5]$. Il est alors possible d'appliquer cette fonction à notre inégalité (la fonction étant croissante, le sens de l'inégalité est conservée).
  Ainsi, on a $f(-1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(5)$.
  On sait par ailleurs que $f(u_n) = u_{n+1}$, que $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, que $f(5) = 5$ et enfin que $f(-1) = 1 \geqslant -1$.
  On en conclut donc que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathcal{P}$ est héréditaire.
  D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel $n$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$ : la suite $(u_n)$ est donc décroissante, minorée par $-1$ et majorée par $5$.

# 5 Suites usuelles

## 5.1 Suites arithmétiques

### Définition récursive

**Définition 5 :** Soit $(u_n)$ une suite. On dit que la suite $(u_n)$ est **arithmétique** s'il existe un réel $r$ tel que pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel $r$ est appelé la **raison** de la suite.

R Attention, cette quantité $r$ peut très bien être négative !

$$u_0 \underset{-r}{\overset{+r}{\rightleftarrows}} u_1 \underset{-r}{\overset{+r}{\rightleftarrows}} u_2 \underset{-r}{\overset{+r}{\rightleftarrows}} u_3 \quad \cdots \quad u_n \underset{-r}{\overset{+r}{\rightleftarrows}} u_{n+1}$$

■ **Exemple 17 :** La suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$$

est arithmétique, de raison 4.

**Méthode 3 :** Pour montrer qu'une suite $(u_n)$ est arithmétique, on montre que $(u_{n+1} - u_n)$ est constante.

■ **Exemple 18 :** La suite $(v_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -2n + 7$ est arithmétique de raison $-2$.

En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} - v_n = -2(n+1) + 7 - (-2n+7) = -2$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, on a $v_{n+1} = v_n + (-2)$.

**Conclusion** : La suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $-2$.

■ **Exemple 19 :** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

On admet que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \neq 1$ et on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Montrons que la suite $(v_n)$ est arithmétique.

Pour tout entier naturel $n$, on a $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$. Ainsi,

$$v_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1} = \frac{1}{\dfrac{5u_n - 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{u_n + 3}{4u_n - 4}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3}{4u_n - 4} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3}{4u_n - 4} - \frac{4}{4u_n - 4} = \frac{u_n - 1}{4u_n - 4} = \frac{u_n - 1}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4}.$$

**Conclusion** : La suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

**Méthode 4 :** Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de trouver deux couples de termes de la suite n'ayant pas la même différence.

■ **Exemple 20 :** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = n^2 + n - 2$.

On a alors $u_0 = -2$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 4$. Ainsi, $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. La suite $(u_n)$ n'est donc pas arithmétique.

### Terme général

**Propriété 3 :** Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $r$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = u_0 + nr$$

**Démonstration 3 :** Pour tout entier naturel $n$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n = u_0 + rn$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 + r \times 0 = u_0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 + rn$. Or, $u_{n+1} = u_n + r$. Ainsi, $u_{n+1} = u_0 + rn + r = u_0 + r(n+1)$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie. $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

□

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rrr, bend right, "+3\times r"'] \arrow[rrrrr, bend right, "+n\times r"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1}
\end{tikzcd}$$

■ **Exemple 21 :** Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 5$ et de raison $r = -3$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 + (-3) \times n = 5 - 3n$. En particulier, $u_{100} = 5 - 3 \times 100 = -295$.

### Variations

**Propriété 4 :** Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$.

- Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)$ est strictement croissante ;
- Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

**Démonstration 4 :** Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = r$ □

### Somme de termes d'une suite arithmétique

**Propriété 5 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

**Démonstration 5 :** Revoir le chapitre sur les sommes ! □

■ **Exemple 22 :** La somme de tous les nombres entiers de 1 à 100 vaut $\dfrac{100 \times 101}{2}$ soit 5050.

**Propriété 6 :** Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = \text{Nombre de termes } \times \frac{\text{Premier terme + Dernier terme}}{2}$$

**Démonstration 6 :** On rappelle que pour une suite $(u_n)$ arithmétique, de raison $r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + rn$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0 + rk) = \sum_{k=0}^{n} u_0 + \sum_{k=0}^{n} rk.$$

En utilisant le résultat précédent, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)u_0 + rn(n+1)}{2}.$$

On trouve alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_0 + rn)}{2} = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}.$$

□

■ **Exemple 23 :** On souhaite calculer la somme $7+11+15+\ldots+243$, où les nombres de la somme croissent de 4 en 4.

Les nombres de la somme sont les termes de la suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = 4$

On cherche alors l'entier $n$ tel que $u_n = 243$. On a alors $u_0 + rn = 243$, c'est-à-dire $7+4n = 243$, d'où $n = 59$.

Ainsi, $7+11+15+\ldots+243 = u_0+u_1+\ldots+u_{59} = (59+1)7+2432 = 7500$.

## 5.2 Suites géométriques

### Définition récursive

**Définition 6 :** Soit $(u_n)$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)$ est **géométrique** s'il existe un réel $q$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Le réel $q$ est appelé la **raison** de la suite.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_1 \arrow[l, bend left, "/q"] \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[l, bend left, "/q"] \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[l, bend left, "/q"] & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1} \arrow[l, bend left, "/q"] \end{tikzcd}$$

■ **Exemple 24 :** La suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

est géométrique, de raison 2.

**Méthode 5 :** Pour montrer qu'une suite $(u_n)$ est géométrique, on exprime $u_{n+1}$ et on factorise l'expression obtenue en faisant apparaître $u_n$.

■ **Exemple 25 :** On considère la suite $(a_n)$ définie par $a_0 = -1$ et, pour tout entier naturel $n$, $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$. Pour tout entier naturel $n$, on pose alors $u_n = -\frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$u_{n+1} = -\frac{1}{3}a_{n+2} + \frac{1}{3}a_{n+1} = -\frac{1}{3}(-a_{n+1}+2a_n) + \frac{1}{3}a_{n+1} = -\frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n = 2\left(-\frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n\right) = 2u_n.$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} = 2u_n$.

**Conclusion** : La suite $(u_n)$ est géométrique de raison 2.

### Terme général

**Propriété 7 :** Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = q^n \times u_0$$

**Démonstration 7 :** Pour tout entier naturel $n$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n = u_0 \times q^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 \times q^n$. Or, $u_{n+1} = q\,u_n$. Ainsi, $u_{n+1} = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie. $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

□

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrr, bend right, "\times q^3"'] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1}
\end{tikzcd}$$

■ **Exemple 26 :** On considère la suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = -3$. Alors, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 5 \times (-3)^n$.

R Attention à la formulation lorsque des pourcentages sont en jeu : ajouter 10%, c'est faire une multiplication par 1,1. Ce n'est pas une addition !

■ **Exemple 27 :** Un particulier place 3000 euros sur un livret au taux d'intérêts composés annuel de 1%. Cela signifie que chaque année, le capital sur le livret augmente de 1%. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $C_n$ le capital sur le livret après $n$ années, exprimé en euros. On a donc

- $C_0 = 3000$ ;
- $C_1 = 3000 \times \left(1 + \dfrac{1}{100}\right) = 3000 \times 1,01 = 3030$;
- $C_2 = 3030 \times \left(1 + \dfrac{1}{100}\right) = 3030 \times 1,01 = 3060.3$.

Pour tout entier naturel $n$, $C_{n+1} = 1,01C_n$. La suite $(C_n)$ est géométrique, de raison 1,01.

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $C_n = 3000 \times 1,01^n$

### Sens de variation

**Propriété 8 :** Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$. On suppose $u_0 \neq 0$.

- Si $q < 0$, alors la suite $(u_n)$ n'est pas monotone.
- Si $0 < q < 1$, la suite $(u_n)$ est :
  - strictement décroissante si $u_0 > 0$ ;
  - strictement croissante si $u_0 < 0$.
- Si $q > 1$, la suite $(u_n)$ est :
  - strictement croissante si $u_0 > 0$ ;
  - strictement décroissante si $u_0 < 0$.

**Démonstration 8 :** **Cas 1 :** $q < 0$ **:** dans ce cas, les termes de la suite $(u_n)$ changent de signe à chaque rang. La suite ne peut donc être monotone.

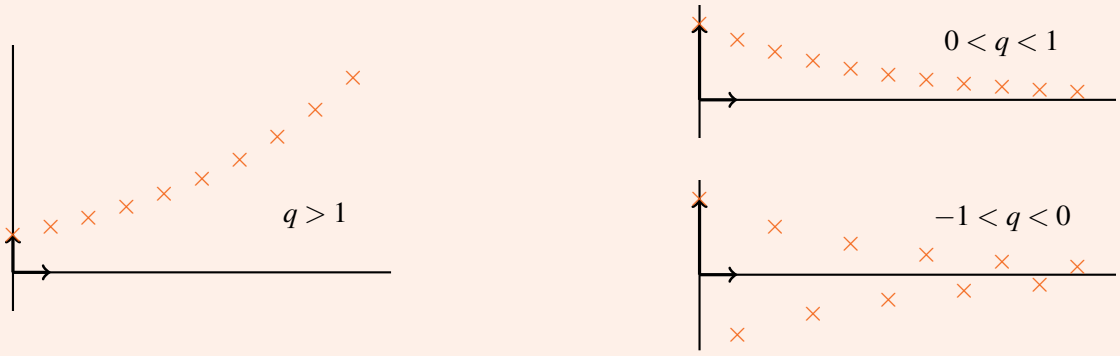
**Cas 2 :** $0 < q < 1$ **:** pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q-1)$$

Or, $q - 1 < 0$, donc $u_0 q^n (q-1)$ est du signe opposé à $u_0$, d'où la conclusion.

**Cas 3 :** $q > 1$ **:** On procède de la même manière mais cette fois, $q - 1 > 0$. □

**Propriété 9 :** On représente ci-dessous l'allure des suites $(q^n)$.




### Somme de termes d'une suite géométrique

**Propriété 10 :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q$ un réel différent de 1. Alors,

$$\sum_{k=0} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Démonstration 9 :** Revoir le chapitre sur les sommes ! □

■ **Exemple 28 :** On souhaite calculer la valeur de $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2048}$, où chaque terme de la somme vaut la moitié du précédent.

Ici, $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{11}$ avec $q = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{4096}\right) = \frac{4095}{2048}$$

**Propriété 11 :** Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ différente de 1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \text{Premier terme } \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

**Démonstration 10 :** On a en effet

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 \times q^k = u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

□

■ **Exemple 29 :** Notons $S = 5+10+20+\ldots+40960$, où chaque terme de la somme vaut le double du terme précédent. On a alors

$$S = 5\times(1+2+4+\ldots+8192) = 5\times(1+2+2^2+\ldots+2^{13}).$$

Ainsi,

$$S = 5\times\frac{1-2^{14}}{1-2} = 81915.$$

## 5.3 Suites arithmético-géométriques

**Définition 7 :** Soit $(u_n)$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)$ est arithmético-géométrique s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = au_n + b$.

■ **Exemple 30 :** La suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n+1 \end{cases}$$

est arithmético-géométrique.

R Si $a=0$, la suite est constante. Si $a=1$, la suite est arithmétique. Si $b=0$, la suite est géométrique.
Nous exclurons donc ces cas dans la suite de l'étude.
Dans tous les autres cas, la suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

♥ **Propriété 12 :** Soit $a$ et $b$ deux réels avec $a\neq 1$. Soit $(u_n)$ la suite arithmético-géométrique vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n+b$.

On note $\ell$ l'unique solution de l'équation $x = ax+b$.

Alors la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison $a$.

R L'équation $x = ax+b$ est appelée équation caractéristique de la suite.

**Démonstration 11 :** D'abord, l'équation $x = ax+b$ admet bien une unique solution qui est $\frac{b}{1-a}$. Notons-la $\ell$.

Par ailleurs, pour tout entier naturel $n$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell.$$

Or, puisque $\ell = a\ell + b$, il en vient que $b-\ell = -a\ell$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} = au_n - a\ell = a(u_n-\ell) = av_n.$$

La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison $a$. □

R Dans cette démonstration, nous ne nous sommes pas servis de l'expression de $\ell$ en fonction de $a$ et $b$.

Cette méthode nous permet donc de trouver facilement une suite géométrique, dont on sait exprimer le terme de rang $n$ en fonction de $n$.

À partir de cette suite auxiliaire, nous pouvons donc déterminer le terme général de la suite d'origine.

**Méthode 6 :** Pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$.

1. On résout l'équation caractéristique $x = ax + b$. On note $\ell$ sa solution.
2. On introduit la suite $(v_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$.
   On **montre** que la suite $(v_n)$ est géométrique.
3. On en déduit l'expression de $v_n$ (puis de $u_n$) en fonction de $n$.

■ **Exemple 31 :** On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$$

On souhaite déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de $n$. On remarque que cette suite est arithmético-géométrique.

1. L'équation caractéristique de cette suite est $x = 3x - 1$. La solution de cette équation est $\frac{1}{2}$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = u_n - \frac{1}{2}$. Montrons que la suite $(v_n)$ est géométrique.
   En effet, pour tout entier naturel $n$,
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = 3u_n - 1 - \frac{1}{2} = 3u_n - \frac{3}{2} = 3\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 3v_n.$$
   La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison 3.
3. On a $v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.
   Puisque la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 3, alors pour tout entier naturel $n$, on a $v_n = v_0 \times 3^n$ et donc $v_n = \frac{9}{2} \times 3^n$.
   Par ailleurs, pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ et donc $u_n = v_n + \frac{1}{2}$.

**Conclusion** : Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} \times 3^n$.

## 5.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Définition 8 :** Soit $(u_n)$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

■ **Exemple 32 :** La suite de Fibonacci est la suite $(F_n)$ définie par

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}.$$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

■ **Exemple 33 :** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 6v_n \end{cases}$$

Soit $n$ un entier naturel. On a alors

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2v_{n+1} = 3u_{n+1} - 2(u_n + 6v_n) = 3u_{n+1} - 2u_n - 12v_n.$$

Or, puisque $u_{n+1} = 3u_n - 2v_n$, on a alors $u_{n+1} - 3u_n = -2v_n$ et donc $6u_{n+1} - 18u_n = -12v_n$. Ainsi,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 6u_{n+1} - 18u_n = 9u_{n+1} - 20u_n.$$

De même, on a

$$v_{n+2} = u_{n+1} + 6v_{n+1} = 3u_n - 2v_n + 6v_{n+1}.$$

Or, puisque $v_{n+1} = u_n + 6v_n$, on a donc $v_{n+1} - 6v_n = u_n$ et donc $3v_{n+1} - 18v_n = 3u_n$. Ainsi,

$$v_{n+2} = 3v_{n+1} - 18v_n - 2v_n + 6v_{n+1} = 9v_{n+1} - 20v_n.$$

**Conclusion** : les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont récurrentes linéaires d'ordre 2 et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+2} = 9u_{n+1} - 20u_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+2} = 9v_{n+1} - 20v_n.$$

**Définition 9 :** Soit $(u_n)$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Soit $a$ et $b$ les réels tels que pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)$ est l'équation

$$(E) \quad : \quad x^2 - ax - b = 0.$$

■ **Exemple 34 :** L'équation caractéristique de la suite de Fibonacci est $x^2 - x - 1 = 0$.

R L'équation caractéristique est une équation du second degré. C'est donc une équation que l'on sait résoudre... Et que l'on va résoudre, puisqu'elle nous permettra d'exprimer le terme de la suite en fonction du rang $n$.

♥ **Propriété 13 :** Soit $(u_n)$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $(E)$.

- Si l'équation $(E)$ admet deux solutions réelles $x_1$ et $x_2$, alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on a

$$u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

- Si l'équation $(E)$ admet une unique solution réels $x_0$, alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on a

$$u_n = (\lambda n + \mu) x_0^n.$$

**Démonstration 12 :** En exercice ! □

R Le cas où l'équation caractéristique n'admet pas de racine réelle n'est pas au programme.

**Méthode 7 :** Pour exprimer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

1. On pose l'équation caractéristique $(E)$ ;
2. On résout l'équation $(E)$ ;
   (a) Si l'équation $(E)$ admet deux solutions $x_1$ et $x_2$, alors $u_n$ est de la forme $\lambda x_1^n + \mu x_2^n$ ;
   (b) Si l'équation $(E)$ admet une solution $x_0$, alors $u_n$ est de la forme $(\lambda n + \mu)x_0^n$ ;
3. On détermine les valeurs de $\lambda$ et $\mu$ en utilisant deux termes donnés de la suite (en général $u_0$ et $u_1$) et en résolvant le système ainsi constitué ;
4. On conclut !

■ **Exemple 35 :** On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}.$$

La suite $(u_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

1. L'équation caractéristique associée à cette suite est

$$(E)\ :\ x^2 - 5x + 6 = 0.$$

2. Il s'agit d'une équation du second degré dont les solutions sont 2 et 3. Si on ne remarque pas immédiatement ces solutions on peut bien évidemment avoir recours au discriminant, mais ce serait du gâchis.
   L'équation caractéristique admet donc deux solutions réelles. Soit donc $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \lambda \times 2^n + \mu \times 3^n.$$

3. Il nous faut désormais déterminer les valeurs de $\lambda$ et $\mu$.
   On sait que $u_0 = 3$ et $u_1 = 5$. Or, $u_0 = \lambda \times 2^0 + \mu \times 3^0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda \times 2^1 + \mu \times 3^1 = 2\lambda + 3\mu$.
   Les réels $\lambda$ et $\mu$ vérifient donc le système

$$(S)\ :\ \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 2\lambda + 3\mu = 5 \end{cases}.$$

   Or,

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 & (L_1) \\ \mu = -1 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = 4 \\ \mu = -1 \end{array}$$

**Conclusion** : Pour tout entier naturel $n$, $u_n = 4 \times 2^n - 3^n$.

■ **Exemple 36 :** On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}.$$

La suite $(u_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

1. L'équation caractéristique associée à cette suite est

$$(E)\ :\ x^2-4x+4=0.$$

2. On sait que $x^2-4x+4=(x-2)^2$. L'équation $(E)$ admet donc une unique solution, qui est 2. Ici, un discriminant ferait vraiment mauvais genre :
L'équation caractéristique admet donc une unique solution réelle. Soit donc $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n=(\lambda n+\mu)\times 2^n$$

3. Il nous faut désormais déterminer les valeurs de $\lambda$ et $\mu$.
On sait que $u_0=1$ et $u_1=0$. Or, $u_0=(\lambda\times 0+\mu)\times 2^0=\mu$ et $u_1=(\lambda\times 1+\mu)\times 2^1=2(\lambda+\mu)$.
On a donc $\mu=1$ et $2(\lambda+\mu)=0$ soit $\lambda=-1$.

**Conclusion** : Pour tout entier naturel $n$, $u_n=(1-n)2^n$.