Généralités sur les suites

Généralités

► Exercice 1 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

a. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ **b.** $u_n = n^2$ **c.** $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

d. $u_n = 3 \times 0,2^n - 1$ **e.** $u_n = \dfrac{2n+5}{3n+2}$ **e.** $u_n = 5^{n+1} - 5^n$

g. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 12n - 4 \end{cases}$ **h.** $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n^2+1} \end{cases}$

i. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1+u_n) \end{cases}$ **j.** $\begin{cases} u_0 = \pi \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

► Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+u_n}$.

1. Écrire une fonction PYTHON `suite_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.
Montrer que la suite (u_n) est bien définie, que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$ et que (u_n) est décroissante.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n+4}{u_n+2}$.

1. Montrer que la fonction f définie pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

Suites arithmétiques et géométriques

► Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x-2}{2x-1}$. Déterminer le sens de variations de f sur son domaine de définition.
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose alors $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
   (b) En déduire une expression de v_n puis de u_n pour tout entier naturel n.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, $e^2 \leqslant u_n$.
2. Écrire une fonction PYTHON `suite_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.
3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \ln(u_n) - 2$.
   (a) Justifier que la suite (a_n) est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (a_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par $u_0 = 2$, $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}.$$

1. Écrire une fonction PYTHON `terme_uv` qui prend en entrée un entier n et renvoie les valeurs de u_n et v_n.
2. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
3. Déterminer la nature de la suite $(u_n + v_n)$.
4. En déduire l'expression de u_n et v_n pour tout entier naturel n.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}.$$

1. Écrire une fonction PYTHON `terme_uv` qui prend en entrée un entier n et renvoie les valeurs de u_n et v_n.
2. Déterminer la nature de la suite $(u_n + v_n)$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \dfrac{v_n}{3^n}$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est arithmétique.
   (b) En déduire les expressions de v_n et u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

► Exercice 10 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x}{1+2x}$ sur son domaine de définition.
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < 1$.
3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, de raison 3.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Un particulier dépose, le 1er janvier de chaque année, une somme C sur un livret au taux annuel t (cela signifie que chaque année, le capital disponible sur ce livret est multiplié par $(1+t)$. On note S_n la somme disponible sur le livret au bout de n années. Exprimer S_n en fonction de C, t et n.

Suites arithmético-géométriques

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+5}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1 - 3u_n$.

1. Déterminer l'expression de u_n pour tout entier naturel n.
2. Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère un prêt immobilier à taux fixe, dont le taux mensuel est noté t. On note M la mensualité constante à verser, N la durée en mois de ce prêt et C la valeur du capital emprunté.

Pour $n \geqslant 0$, on note C_n le capital restant à rembourser après n mois et I_n l'intérêt remboursé durant le n-ième mois. On a en particulier $C_0 = C$.

L'intérêt à rembourser sur un mois est calculé à partir du capital restant à rembourser à la banque au début de ce mois. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $I_{n+1} = tC_n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel $n \leqslant N$, on a $C_{n+1} = (1+t)C_n - M$.
2. En déduire une expression de C_n en fonction de t, M et n.
3. Que vaut C_N ? En déduire une expression permettant de calculer M en fonction de t, N et C.
4. On note I le montant total des intérêts versés par le client suite au remboursement intégral du crédit. Exprimer I en fonction de N, M et C.
5. Retrouver ce résultat en remarquant que $I = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} I_k$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. Écrire une fonction PYTHON `suite_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmético-géométrique.
   (b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n pour tout entier naturel n.
3. Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_n \end{cases}$$

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
2. En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n) en fonction de n, pour tout entier naturel n.

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \sqrt{2}v_n \\ v_{n+1} = \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n \\ w_{n+1} = \sqrt{2}v_n + w_n \end{cases}.$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = u_n - w_n$. Donner la nature de la suite (d_n).
2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_n + w_n$. Exprimer S_{n+1} en fonction de v_n et S_n.
3. Soit n un entier naturel. Exprimer v_{n+2} en fonction de S_{n+1} et v_{n+1} puis en fonction de v_{n+1} et v_n.
4. Donner l'expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
5. En déduire les expressions de u_n et w_n pour tout entier naturel n.

► Exercice 19 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. On considère la suite (u_n) vérifiant pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

On note Δ le discriminant du polynôme $x^2 - ax - b$, que l'on suppose positif. On note x_1 et x_2 les solutions, éventuellement égales, de cette équation.

1. Calculer $x_1 + x_2$ et x_1x_2.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_{n+1} - x_1u_n$. Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est géométrique et en déduire l'expression de son terme général.
3. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}(u_{k+1} - x_1u_k)$.
4. Déduire des questions précédentes, en distinguant les cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$, l'expression de u_n pour tout entier naturel n.

Corrigés

► Correction 1 – Voir l'énoncé

a. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\geqslant 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

b. La fonction $x\mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

c. Pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}\geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

d. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}-u_n=3\times 0,2^{n+1}-1-(3\times 0,2^n-1)=3\times 0,2^n\times(0,2-1)=-2,4\times 0,2^n\leqslant 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

e. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2(n+1)+5}{3(n+1)+2}-\frac{2n+5}{3n+2}=\frac{2n+7}{3n+5}-\frac{2n+5}{3n+2}=\frac{(2n+7)(3n+2)-(2n+5)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)}.$$

et donc

$$u_{n+1}-u_n=\frac{6n^2+4n+21n+28-6n^2-10n-15n-25}{(3n+5)(3n+2)}=\frac{3}{(3n+5)(3n+2)}\geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

f. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}-u_n=5^{n+2}-5^{n+1}-(5^{n+1}-5^n)=5^n\times(5^2-2\times 5+1)=16\times 5^n\geqslant 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

g. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}-u_n=u_n+12n-4-u_n=12n-4.$$

Or, si $n=0$, alors $12n-4=-4\leqslant 0$ et si $n\geqslant 1$, alors $12n-4\geqslant 8\geqslant 0$.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

h. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}-u_n=u_n-\frac{1}{n^2+1}-u_n=-\frac{1}{n^2+1}\leqslant 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

i. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1+u_n) - u_n = u_n + u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leqslant 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

j. Remarquons d'abord que $u_0 \geqslant 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \geqslant 0$. On utilise alors la quantité conjuguée. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n^2} - u_n = \frac{(\sqrt{1+u_n^2} - u_n)(\sqrt{1+u_n^2} + u_n)}{\sqrt{1+u_n^2} + u_n}.$$

et donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{1+u_n^2}^2 - u_n^2}{\sqrt{1+u_n^2} + u_n} = \frac{1+u_n^2 - u_n^2}{\sqrt{1+u_n^2} + u_n} = \frac{1}{\sqrt{1+u_n^2} + u_n} \geqslant 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante. On aurait pu aussi remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $1 + u_n^2 \geqslant u_n^2$ et donc, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{1+u_n^2} \geqslant \sqrt{u_n^2}$. Or, puisque $u_n \geqslant 0$, on a $\sqrt{u_n^2} = u_n$. Ainsi, on a $\sqrt{1+u_n^2} \geqslant u_n$ et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.

▶ Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « u_n existe et $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que u_n existe et $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Ainsi, $\frac{1}{2} + 1 \leqslant u_n + 1 \leqslant 1 + 1$, c'est-à-dire $\frac{3}{2} \leqslant u_n + 1 \leqslant 2$.
  On a donc $u_n + 1 \neq 0$ et il est donc possible de calculer u_{n+1}.
  On applique alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ à cette inégalité. Cette fonction étant décroissante sur $]0;+\infty[$, l'inégalité est alors renversée.
  On a donc $\frac{2}{3} \geqslant \frac{1}{1+u_n} \geqslant \frac{1}{2}$. Or, $\frac{2}{3} \leqslant 1$. On a donc bien $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

▶ Correction 3 – Voir l'énoncé

```python
def suite_u(n):
    u = 0
    for i in range(n):
        u = 2 * u / (2 + u)
    return u
```

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$.
  On a donc $2 + u_n > 2$ et en particulier, $2 + u_n \neq 0$. Il est donc possible de calculer u_{n+1}.
  Or, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+u_n}$. u_{n+1} est donc le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc strictement positif lui aussi. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. On peut donc déterminer les variations de la suite (u_n) en étudiant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Or, pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n}{2+u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{2}{2+u_n}.$$

Or, puisque $u_n > 0$, il en vient que $2+u_n > 2$ et donc que $\dfrac{2}{2+u_n} < 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, et donc $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « u_n et u_{n+1} existent et $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 = 5$ et $u_1 = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$.
  On a donc $2u_n - 1 \geqslant 2u_{n+1} - 1 \geqslant 2 \times 1 - 1$. En particulier, on a $2u_{n+1} - 1 \geqslant 1 \geqslant 0$, il est donc possible de calculer u_{n+2}.
  On applique alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'inégalité. Cette fonction étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, le sens de l'inégalité ne change pas.
  Ainsi, $\sqrt{2u_n - 1} \geqslant \sqrt{2u_{n+1} - 1} \geqslant \sqrt{2 \times 1 - 1}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant 1$.
  $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. De plus, pour tout réel positif x,

$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - 1 \times (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x + 10 - 5x - 4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}.$$

Ainsi, pour tout réel positif x, $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n et u_{n+1} existent et $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
  Puisque $u_{n+1} \geqslant 0$, on a donc $u_{n+1} \neq -2$ et on peut donc calculer u_{n+2}.
  Par ailleurs, la fonction f étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

  $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4).$$

  Or, $f(0) = 2$, qui est supérieur à 0, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = 4$. Il en vient que

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4.$$

  $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie. $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

f est dérivable sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. Pour tout réel $x \neq \dfrac{1}{2}$,

$$f'(x) = \frac{3(2x-1) - 2(3x-2)}{(2x-1)^2} = \frac{6x - 3 - 6x + 4}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2} > 0.$$

f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « u_n existe et $u_n > 1$ ».

- **Initialisation** : $u_0 = 2 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n > 1$ Ainsi, $2u_n - 1 > 1$ et donc $2u_n - 1 \neq 0$. On peut donc bien calculer u_{n+1}.
  De plus, la fonction f étant strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$, on a donc $f(u_n) > f(1)$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = \dfrac{3 \times 1 - 2}{2 \times 1 - 1} = 1$. Ainsi, $u_{n+1} > 1$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Puisque pour tout entier naturel n, $u_n > 1$, il en vient que $u_n - 1 \neq 0$ et la suite (v_n) est donc bien définie.

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2 - (2u_n - 1)}{2u_n - 1}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{u_n - 1}{2u_n - 1}} - \frac{1}{u_n - 1}$$

et donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2.$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2 + v_n$. La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{2 - 1} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 1 + 2n$.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ et donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{1}{1 + 2n} + 1$.

▶ Correction 7 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: «u_n existe et $\mathrm{e}^2 \leqslant u_n$ ».
2. Écrire une fonction PYTHON `suite_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.

```python
import numpy as np

def suite_u(n):
    u = np.exp(3)
    for i in range(n):
        u = np.exp(1) * np.sqrt(u)
    return u
```

- Initialisation : On a $u_0 = e^3$. On a bien $\mathrm{e}^2 \leqslant u_1 \leqslant \mathrm{e}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $\mathrm{e}^2 \leqslant u_n$.
  En particulier, $u_n \geqslant 0$, on peut donc calculer $\sqrt{u_n}$ et donc u_{n+1}.
  En appliquant la fonction racine carrée, qui est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on a alors $\mathrm{e} \leqslant \sqrt{u_n}$. On multiplie alors par e et on obtient $\mathrm{e} \times \mathrm{e} \leqslant \mathrm{e}\sqrt{u_n}$ soit $\mathrm{e}^2 \leqslant u_{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.

- Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. Soit n un entier naturel. On a

$$u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\mathrm{e} - \sqrt{u_n}).$$

Or, puisque $u_n \geqslant \mathrm{e}^2$, alors, par croissance de la fonction Racine Carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{u_n} \geqslant \mathrm{e}$ et donc $e - \sqrt{u_n} \leqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

4. (a) Pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \mathrm{e}^2$ et donc, en particulier, $u_n > 0$. La suite (a_n) est donc bien définie.

   (b) Pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 = \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2 = 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2) = \frac{1}{2}a_n.$$

   La suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0 = \ln(u_0) - 2$
   On a donc $a_0 = \ln(e^3) - 2 = 3 - 2 = 1$.

   (c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = \exp(a_n + 2) = \exp\left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

▶ Correction 8 – Voir l'énoncé

```python
def terme_uv(n):
    u, v = 2, 3
    for i in range(n):
        u, v = 2 * u + v, u + 2 * v
    return u, v
```

2. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = 2u_n + v_n - (u_n + 2v_n) = 2u_n - u_n + v_n - 2v_n = u_n - v_n.$$

La suite $(u_n - v_n)$ est donc constante. De plus, $u_0 - v_0 = -1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n - v_n = -1$.

3. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_n + v_n + u_n + 2v_n = 3u_n + 3v_n = 3(u_n + v_n).$$

La suite $(u_n + v_n)$ est donc géométrique de raison 3. De plus, $u_0 + v_0 = 2 + 3 = 5$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 5 \times 3^n$.

4. Soit n un entier naturel. D'après les questions précédentes, on a

$$\begin{cases} u_n - v_n = -1 \\ u_n + v_n = 5 \times 3^n \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} u_n = -1 + v_n \\ -1 + v_n + v_n = 5 \times 3^n \end{cases}$$

Ainsi,

$$v_n = \frac{5 \times 3^n + 1}{2} \qquad \text{et} \qquad u_n = -1 + v_n = \frac{5 \times 3^n - 1}{2}.$$

▶ Correction 9 – Voir l'énoncé

```python
def terme_uv(n):
    u, v = 2, -1
    for i in range(n):
        u, v = 2 * u - v, u + 4 * v
    return u, v
```

Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}+v_{n+1}=2u_n-v_n+u_n+4v_n=3u_n+3v_n=3(u_n+v_n).$$

La suite (u_n+v_n) est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0+v_0=2+(-1)=1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_n+v_n=3^n$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1}=u_n+4v_n=u_n+v_n+3v_n=3^n+3v_n.$$

Pour tout entier naturel n, on a alors

$$w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{3^n+3v_n}{3^{n+1}}=\frac{3^n}{3^{n+1}}+\frac{3v_n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+\frac{v_n}{3^n}=\frac{1}{3}+w_n.$$

Ainsi, la suite (w_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $w_0=\dfrac{v_0}{3^0}=-1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $w_n=-1+\dfrac{n}{3}$ et donc

$$v_n=3^nw_n=3^n\left(-1+\frac{n}{3}\right)=3^{n-1}(n-3).$$

Finalement, pour tout entier naturel n,

$$u_n=3^n-v_n=3^n-3^{n-1}(n-3)=3^{n-1}(3-(n-3))=3^{n-1}(6-n).$$

► Correction 10 – Voir l'énoncé

La fonction f est définie et dérivable sur $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ et $]-\frac{1}{2};+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout réel $x\neq-\frac{1}{2}$, on a alors

$$f'(x)=\frac{3\times(1+2x)-3x\times 2}{(1+2x)^2}=\frac{3}{(1+2x)^2}>0.$$

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ et $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « u_n existe et $0<u_n<1$ ».

- **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $u_0=\dfrac{1}{2}$. On a bien $0<u_0<1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Puisque $u_n>0$ et que f est définie sur $]0;+\infty[$, on peut calculer $f(u_n)$. Ainsi, u_{n+1} existe.
  De plus, puisque f est strictement croissante sur $[0;1]$, on a $f(0)<f(u_n)<f(1)$ soit $0<u_{n+1}<1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Soit $n\in\mathbb{N}$, on a alors

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{1+2u_n}-u_n=\frac{3u_n-(1+2u_n)u_n}{1+2u_n}=\frac{2u_n-2u_n^2}{1+2u_n}=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}.$$

Or, puisque $0<u_n<1$, on a alors $1-u_n>0$, $u_n>0$ et $1+2u_n>0$. Ainsi, $u_{n+1}-u_n>0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1-2u_n}}{\dfrac{1+2u_n-3u_n}{1-2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 3.

On a par ailleurs $v_0 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 3^n = 3^n$.

Pour tout entier naturel n, on a $v_n(1-u_n) = u_n$ et donc $v_n = u_n + u_n v_n$, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$. Finalement, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, $S_{n+1} = (1+t)S_n$. La suite (S_n) est donc une suite géométrique de raison $(1+t)$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $S_n = S_0(1+t)^n = C \times (1+t)^n$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x = \dfrac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 3$. On a alors, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{u_n - 3}{3} = \frac{1}{3}v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = -1 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $u_n = 3 - 1 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x = \dfrac{x+5}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \frac{5}{3}$. On a alors, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{u_n+5}{4} - \frac{5}{3} = \frac{u_n}{4} + \frac{5}{4} - \frac{5}{3} = \frac{v_n}{4} + \frac{\frac{5}{3}}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{4}v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{7}{3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $u_n = \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 3$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 3$. On a alors, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 0$ et $u_n = 3$... Oups, peut-être aurait-on pu le remarquer plus tôt ?

► Correction 13 – Voir l'énoncé

Soit $x \in \mathbb{R}/$. On a $x = 1 - 3x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{4}$. On a alors, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_n - \frac{1}{4} = 1 - 3un - \frac{1}{4} = -3\left(v_n + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = -3v_n - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = -3v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison -3 et de premier terme $v_0 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{3}{4} times 3^n$ et $u_n = v_n + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \times 3^n$.
Pour tout entier naturel n, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{n+1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{n+1}{4} - \frac{3}{8}(1-3^{n+1}).$$

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Soit n un entier naturel. Au $(n+1)$-ième mois, la somme à rembourser est de C_n (la somme restant le mois précédent) à laquelle on retire M (la mensualité) mais à laquelle on doit ajouter les intérêts qui valent tC_n. Ainsi, $C_{n+1} = C_n - M + tC_n = (1+t)C_n - M$.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On utilise donc la méthode standard de résolution.

- Soit x un réel. On a $x = (1+t)x - M \Leftrightarrow x = \dfrac{M}{t}$.
- Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = C_n - \dfrac{M}{t}$. Montrons que (u_n) est géométrique. Pour tout entier naturel n, on a

  $$u_{n+1} = C_{n+1} - \frac{M}{t} = (1+t)C_n - M - \frac{M}{t} = 1 + t(C_n) - \frac{(1+t)M}{t} = (1+t)\left(C_n - \frac{M}{t}\right) = (1+t)u_n.$$

  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $1+t$ et de premier terme $u_0 = C_0 - \dfrac{M}{t}$.
- Pour tout entier naturel n, on a donc $u_n = \left(C - \dfrac{M}{t}\right)(1+t)^n$ et

  $$C_n = u_n + \frac{M}{t} = \frac{M}{t} + \left(C - \frac{M}{t}\right)(1+t)^n.$$

Au bout de N mois, le capital restant à rembourser est de 0. On a donc

$$\frac{M}{t} + \left(C - \frac{M}{t}\right)(1+t)^N = 0.$$

Ainsi,

$$M \times \frac{1-(1+t)^N}{t} = -C(1+t)^N.$$

et donc

$$M = \frac{Ct(1+t)^N}{(1+t)^N - 1}.$$

Remarque : Cette formule est généralement réécrite en

$$M = \frac{Ct}{1-(1+t)^{-N}}.$$

Le total des intérêts versés est égal à la somme totale versé à laquelle on retire le capital emprunté.
Ainsi, $I = NM - C$. Par ailleurs,

$$I = \sum_{k=1}^{N} I_k = \sum_{k=1}^{N} tC_{k+1} = t\sum_{k=1}^{N} C_{k+1} = t\sum_{k=0}^{N-1} C_k.$$

On a donc

$$I = t\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{M}{t} + \left(C - \frac{M}{t}\right)(1+t)^k\right) = t\sum_{k=0}^{N-1}\frac{M}{t} + t\left(C - \frac{M}{t}\right)\sum_{k=0}^{N-1}(1+t)^k.$$

puis

$$I = t \times N \times \frac{M}{t} + (tC - M)\frac{1-(1+t)^N}{1-(1+t)} = NM - (tC-M)\frac{1-(1+t)^N}{t}.$$

Or,

$$(tC-M)\frac{1-(1+t)^N}{t} = C - C(1+t)^N - M \times \frac{1-(1+t)^N}{t} = C - \frac{M}{t} - \left(C - \frac{M}{t}\right)(1+t)^N.$$

Or, on a vu à la question 3 que $\frac{M}{t} + \left(C - \frac{M}{t}\right)(1+t)^N = 0$. Finalement, on trouve bien $I = NM - C$.

▶ Correction 15 – Voir l'énoncé

```python
def suite_u(n):
    u = 0
    for i in range(n):
        u = 2 * u + 3 ** i
    return u
```

Pour tout entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^n} = \frac{2u_n + 3^n}{3^n} = 2\frac{u_n}{3^n} + \frac{3^n}{3^n} = 2v_n + 1$$

La suite (v_n) est donc arithmético-géométrique. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n + 1$ et on a alors

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = 2v_n + 1 + 1 = 2v_n + 2 = 2(v_n + 1) = 2w_n.$$

La suite (w_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = w_0 + 1 = \frac{u_0}{3^0} + 1 = 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 \times 2^n = 2^n$ et donc $v_n = w_n - 1 = 2^n - 1$.

Finalement, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n v_n = 3^n(2^n - 1) = 6^n - 3^n$.

Pour tout entier naturel n, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 6^k - \sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1-6^{n+1}}{1-6} + \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{6^{n+1}-1}{5} + \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$