Fonctions polynomiales

1 Généralités

1.1 Polynôme

Définition 1 : Une fonction P est dite **polynomiale** s'il existe un entier naturel n et des réels a_0, ..., a_n tels que, pour tout réel x, on a $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Les réels a_0, ..., a_n sont les **coefficients** du polynôme P.

Le **polynôme nul** est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

L'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[x]$.

■ **Exemple 1 :** La fonction $P : x \mapsto 2x^2 - 3x + 2$ est polynomiale.
La fonction $Q : x \mapsto (x-3)(2x-7)$ est polynomiale.
Les fonctions affines sont polynomiales.

R Dans le cadre de ce cours, nous confondrons les appellations "polynôme" et "fonction polynomiale", bien qu'en réalité, ces deux appellations désignent deux objets différents.

Il se peut d'ailleurs que vous rencontriez des polynômes notés avec un X majuscule, que l'on appelle une indéterminée. L'approche à adopter ne sera toutefois en rien différente de ce que nous ferons ici.

Propriété 1 : Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynômiale.

Alors P est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $P'(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$.

■ **Exemple 2 :** La fonction $P : x \mapsto 5x^4 - 3x^2 + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $P' : x \mapsto 20x^3 - 6x$.

1.2 Degré d'un polynôme

Définition 2 : Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme.

Si P n'est pas le polynôme nul, on appelle **degré** de P, noté $\deg(P)$, le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.
Ce coefficient non nul est par ailleurs appelé **coefficient dominant** du polynôme.

On dit qu'un polynôme est **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.

Si P est le polynôme nul, on conviendra que $\deg(P) = -\infty$.

■ **Exemple 3 :** La fonction $P : x \mapsto 2x^3 - 3x + 2$ est polynomiale, de degré 3.
Les fonctions polynomiales de degré 0 sont les fonctions constantes non nulles.
Les fonctions polynomiales de degré 1 sont les fonctions affines non constantes.

Définition 3 : Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré **au plus** n.

■ **Exemple 4 :** Soit $P : x \mapsto x^3 + 2x - 1$. On a $P \in \mathbb{R}_3[x]$... mais on a aussi $P \in \mathbb{R}_4[x]$.

Propriété 2 : Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$ deux polynômes. Alors

$$P = Q \Leftrightarrow \deg(P) = \deg(Q) \text{ ET } \forall i \in [\![0, \deg(P)]\!],\ a_i = b_i$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux deux à deux.

R Cette propriété nous permet donc de procéder par identification.

■ **Exemple 5 :** Soit $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 6$.
Montrons qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.

Soit x un réel. On a alors

$$(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -2 \\ c - 2b = 3 \\ -2c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

Conclusion : Pour tout réel x, $P(x) = (x-2)(x^2+3)$.

■ **Exemple 6 :** Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Montrons qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. On a

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x + a - b}{x^2-1}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$$

Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{1}{2(x+1)}$.

Propriété 3 : Soit P et Q deux fonctions polynômiales et λ un réel.

- La fonction λP est polynomiale. Si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
- La fonction $P+Q$ est polynômiale et $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.
  De plus, si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) + \max(\deg(P), \deg(Q))$
- La fonction PQ est polynômiale et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- La fonction $P \circ Q$ est polynômiale et $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

2 Racines d'un polynome

2.1 Racine

Définition 4 : Soit P un polynôme et x un réel.

On dit que x est une racine de P si $P(x) = 0$.

R Le terme racine est réservé aux polynômes.
Pour toute autre fonction f, si $f(x) = 0$, on dira que x est un zéro de f.

■ **Exemple 7 :** Le réel 1 est racine de $P : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$.

2.2 Polynôme du second degré

Théorème 1 : Soit a, b et c trois réels vérifiant $a \neq 0$.
Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Alors :

- Si $\Delta < 0$, le polynôme P n'admet pas de racine réelle et ne se factorise pas ;
- Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet une racine double, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
  Dans ce cas, on a alors, pour tout réel x,
  $$P(x) = a(x - x_0)^2 \ ;$$
- Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, avec
  $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
  Dans ce cas, on a alors, pour tout réel x,
  $$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

■ **Exemple 8 :** On souhaite factoriser la polynôme $P : x \mapsto 12x^2 - 5x - 2$.

Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant du polynôme vaut 121.

Ce polynôme admet donc deux racines distinctes x_1 et x_2 avec

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{121}}{2 \times 12} = \frac{5 - 11}{24} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{121}}{2 \times 12} = \frac{5 + 11}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Les solutions trouvés peuvent alors nous servir à factoriser notre polynôme. Pour tout réel x, on a

$$12x^2-5x-2=12\left(x-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=4\times\left(x+\frac{1}{4}\right)\times 3\times\left(x-\frac{2}{3}\right)=(4x+1)(3x-2).$$

Conclusion : Pour tout réel x, $P(x)=(4x+1)(3x-2)$.

Propriété 4 — Relations coefficients-racines : Soit $P : x \mapsto ax^2+bx+c$ un polynôme admettant deux racines x_1 et x_2, éventuellement égales. Alors

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Démonstration 2 : Facile : en exercice ! □

■ **Exemple 9 :** Déterminons s'il existe deux réels dont la somme vaut 13 et le produit vaut 20.

Ces nombres, s'ils existent sont alors les racines du polynôme $P : x \mapsto x^2-13x+20$.

Le discriminant de ce polynôme vaut $(-13)^2-4\times 1\times 20=89$. Ses racines sont donc $\frac{13-\sqrt{89}}{2}$ et $\frac{13+\sqrt{89}}{2}$.

Conclusion : Les deux réels dont la somme vaut 13 et le produit vaut 20 sont $\frac{13-\sqrt{89}}{2}$ et $\frac{13+\sqrt{89}}{2}$.

2.3 Cas général

Propriété 5 : Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ et a un réel.

Alors a est racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que, pour tout réel x,

$$P(x)=(x-a)Q(x).$$

Autrement dit, a est racine de P si et seulement si on peut factoriser P par $(x-a)$.

Méthode 1 : Pour factoriser un polynôme P de degré $n>0$...

- Si $\deg(P)=1$, la factorisation est déjà effectuée ;
- Si $\deg(P)=2$, on utilise les résultats connus (identités remarquables, discriminant...) ;
- Si $\deg(P)\geqslant 3$,
  - on regarde si on connaît une racine α de P, ou on en cherche une évidente (..., -2, -1, 0, ... 1, 2, ...)
  - on factorise P en écrivant $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ avec Q de degré $n-1$;
  - Pour trouver Q, on peut alors développer et procéder par identification – ou en utilisant une autre méthode présentée plus bas ;
  - On réitère le procédé en factorisant le polynôme Q.
- A terme, il ne doit y avoir comme facteurs que des polynômes de degré 1 ET/OU des polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

R Ce n'est pas parce qu'un polynôme n'admet pas de racine qu'il ne peut pas être factorisé !
Par exemple, le polynôme $x \mapsto x^4+1$ n'admet pas de racine et pourtant, pour tout réel x,

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

Toutefois, ce genre de factorisation pathologique sera rarement demandé, et encore moins sans indication...

■ **Exemple 10 :** Soit $P : x \mapsto 3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$.

Cherchons une racine évidente : on remarque que $P(1) = 0$. Ainsi, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que, pour tout réel x, on a $P(x) = (x-1)Q(x)$.

Soit a, b et c trois réels. On a alors

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

Ainsi,

$$P(x) = (x-a)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b-a = 2 \\ c-b = -6 \\ -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Conclusion : Pour tout x, $P(x) = (x-1)(3x^2+5x-1)$.

R Une fois cette première factorisation effectuée, on peut alors de nouveau factoriser le second polynôme de ce produit, qui est un polynôme du second degré. Tout est lié !

Ainsi, lorsque l'on trouve une racine à un polynôme, on peut le factoriser par un polynôme de degré inférieur. Cela nous mène naturellement au théorème suivant...

Théorème 3 : Toute fonction polynômiale de degré n admet au maximum n racines.

... et à sa conséquence immédiate.

Propriété 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Si P admet $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

3 Division euclidienne

Théorème 4 : Soit A et B deux polynômes. Alors il existe un unique couple (B, Q) de polynômes vérifiant

- $A = BQ + R$
- $\deg(R) < \deg(B)$

Le polynôme Q est le quotient et le polynôme R est le reste de la division euclidienne de A par B.

A est le dividende et B est le diviseur.

■ **Exemple 11 :** Effectuons la division euclidienne de $P : x \mapsto 6x^4 - 2x^3 - 2x - 2$ par $x^2 + 2$.

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 2x^3 \qquad\quad -2x \quad -2 & x^2+2 \\ \hline & \end{array}$$

Pour commencer, on divise le terme de plus haut degré du dividende par le terme de plus haut degré du diviseur. On a $\dfrac{6x^4}{x^2} = 6x^2$. On écrit alors ce résultat sous le diviseur.

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^4 - 2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{5-5} & & & & 6x^2 \end{array}$$

On multiplie alors ce facteur par le diviseur, et on soustrait le résultat obtenu au dividende, dans la partie gauche. On obtient alors un reste partiel.

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^4 - 2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{5-5} -6x^4 & -12x^2 & & & 6x^2 \\ \cline{1-2} -2x^3 & -12x^2 & -2x & & \end{array}$$

On recommence alors le processus en utilisant le reste partiel comme nouveau dividende. On a $\dfrac{-2x^3}{x^2} = -2x$. On inscrit donc ce facteur sous le diviseur. On multiplie alors ce facteur par le diviseur et on le soustrait au reste partiel.

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^4 - 2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{5-5} -6x^4 & -12x^2 & & & 6x^2-2x \\ \cline{1-2} -2x^3 & -12x^2 & -2x & & \\ 2x^3 & & +4x & & \\ \cline{1-3} & -12x^2 & +2x & -2 & \end{array}$$

On réitère le procédé jusqu'à ce que le degré du reste partiel soit strictement inférieur au degré du diviseur.

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^4 - 2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{5-5} -6x^4 & -12x^2 & & & 6x^2-2x-12 \\ \cline{1-2} -2x^3 & -12x^2 & -2x & & \\ 2x^3 & & +4x & & \\ \cline{1-3} & -12x^2 & +2x & -2 & \\ & 12x^2 & & +24 & \\ \cline{2-4} & & 2x & +22 & \end{array}$$

Conclusion : Pour tout réel x, $6x^4 - 2x^3 - 2x - 2 = (x^2+2)(6x^2-2x-12) + 2x + 22$.

Nous avons donc une nouvelle méthode pour factoriser un polynôme.

Méthode 2 : Si P est un polynôme dont on connaît une racine α, on peut factoriser P en effectuant la division euclidienne de P par $(x-\alpha)$.

■ **Exemple 12 :** On considère le polynôme $P : x \mapsto 8x^3 - 14x^2 - 7x + 6$. Factorisons P.

Remarquons d'abord que 2 est une racine évident de P. Effectuons donc la division euclidienne de P par $x-2$.

$$\begin{array}{rl|l}
8x^3-14x^2-7x+6 & & x-2 \\ \cline{3-3}
-8x^3+16x^2 & & 8x^2+2x-3 \\ \cline{1-1}
2x^2-7x & & \\
-2x^2+4x & & \\ \cline{1-1}
-3x+6 & & \\
3x-6 & & \\ \cline{1-1}
0 & &
\end{array}$$

Ainsi, pour tout réel x, on a $P(x) = (x-2)(8x^2+2x-3)$.

Pour factoriser complètement P, il reste donc à factoriser, si possible, $8x^2+2x-3$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut 100. Ses racines sont donc $\frac{-2-\sqrt{100}}{2\times 8} = -\frac{3}{4}$ et $\frac{-2+\sqrt{100}}{2\times 8} = \frac{1}{2}$.

Conclusion : Pour tout réel x, $P(x) = 8(x-2)\left(x-\dfrac{3}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

■ **Exemple 13 :** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On souhaite déterminer le reste de la division euclidienne de $P : x \mapsto x^n$ par $Q : x \mapsto x^2-3x+2$.

Puisque Q est de degré 2, le reste de cette division sera donc de degré 1 (ou moins). Ainsi, il existe un polynôme A et deux réels a et b tels que, pour tout réel x,

$$P(x) = (x^2-3x+2)A(x)+ax+b.$$

Nous avons donc ici deux "inconnues" qui sont les réels a et b. Il serait donc bon d'avoir deux équations vérifiées par ces réels. Puisque la relation est valable pour tout réel x, on peut donc choisir deux réels qui nous arrangent... En particulier, deux réels qui annulent le polynôme $x \mapsto x^2-3x+2$!

Il s'agit d'un polynôme du second degré, dont les racines, très évidentes, sont 1 et 2.

- Prenons donc $x = 1$. On a donc $P(x) = 1^n = 1$ et $(x^2-3x+2)A(x)+ax+b = a+b$.
- Prenons $x = 2$. On a donc $P(x) = 2^n$ et $(x^2-3x+2)A(x)+ax+b = 2a+b$.

Les réels a et b vérifient donc $\begin{cases} a+b = 1 \\ 2a+b = 2^n \end{cases}$.

En résolvant ce système, on trouve $a = 2^n-1$ et $b = 2-2^n$.

Conclusion : Le reste de la division euclidienne de $P : x \mapsto x^n$ par $Q : x \mapsto x^2-3x+2$ est

$$x \mapsto (2^n-1)x+2-2^n.$$