Fonctions polynomiales

1 Polynômes et degré

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Déterminer le degré et le coefficient du polynôme $P : x \mapsto \prod_{k=1}^{n} (x^k + 1)$.

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tels que $P(1) = 3$, $P(2) = 5$ et $P'(1) = 2$.

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tels que $P(2) = 5$, $P(-1) = 4$ et $P'(2) = 1$.

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq 1$, on a $\dfrac{x^2+1}{x-1} = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

On souhaite déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que, pour tout réel x, on a $P(x^2) = (x^2+1)P(x)$.

1. Montrer que si $P \neq 0$, on a $\deg(P) = 2$.
2. En déduire la réponse au problème posé.

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la suite de fonctions polynômiales (P_n) définie par $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ P_0() = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\ , P_{n+1}(x) = xP_n(x) + 1 \end{cases}$.

1. Déterminer les fonctions polynômiales $P1$; P_2 et P_3.
2. Conjecturer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P_n puis démontrer cette conjecture.

2 Racines et factorisation

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

On considère le polynôme $P : x \mapsto 9x^3 - 6x^2 - 20x - 8$.

1. Déterminer une racine « évidente » de P.
2. En déduire une factorisation de P.
3. Construire le tableau de signes de P sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

On considère le polynôme $P : x \mapsto 3x^3 - x - 2$.

1. Justifier, sans le calculer, qu'il existe un polynôme Q tel que, pour tout réel x, on a $P(x) = (x-1)Q(x)$.
2. Déterminer le polynôme Q en question.
3. Construire le tableau de signes de P sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère le polynôme $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1. Calculer $P(-2)$.
2. Factoriser P et en déduire l'ensemble de ses racines.
3. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} - 5 + 6\mathrm{e}^{-x} = 0$ sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

Factoriser au maximum les polynômes suivants.

$P_1 : x \mapsto 9x^2 + 3x - 2$ $\qquad$ $P_2 : x \mapsto 10x^3 + 3x^2 - 16x + 3$ $\qquad$ $P_3 : x \mapsto (x^2 - x + 1)^2 - 1$

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit a, b et c trois réels distincts. On considère la fonction polynômiale P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P : x \mapsto \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$

1. Quel est le degré de P au maximum ?
2. Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = 1$.

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit P une fonction polynômiale telle que, pour tout réel x, $P(x+1) = P(x)$. Montrer que P est constante.

3 Division euclidienne

▶ Exercice 13 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, effectuer les divisions euclidiennes de A par B.

- $A : x \mapsto x^5 - x^2 + 2$ et $B : x \mapsto x^2 + 1$;
- $A : x \mapsto x^4 - 3x^2 + 6$ et $B : x \mapsto x^3 - 5x^2 + x - 6$;
- $A : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ et $B : x \mapsto x^2 + 1$.

▶ Exercice 14 – Voir le corrigé

En utilisant la division euclidienne, déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq \dfrac{1}{3}$, on a

$$\frac{6x^2 + x - 3}{3x + 1} = ax + b + \frac{c}{3x - 1}.$$

▶ Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère la polynôme $P : x \mapsto 6x^4 + 19x^3 + 32x^2 + 2x - 5$ et $Q : x \mapsto x^2 + 3x + 5$.

Effectuer la division euclidienne de P par Q puis factoriser le polynôme P.

▶ Exercice 16 – Voir le corrigé

Déterminer les valeurs des réels a et b pour que le polynôme $P : x \mapsto x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 2$ soit divisible par $Q : x \mapsto x^2 + 2$. Quelle factorisation obtient-on alors ?

▶ Exercice 17 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels distincts et $P \in \mathbb{R}[x]$. On considère le polynôme $Q : x \mapsto (x-a)(x-b)$.

Exprimer le reste de la division euclidienne de P par Q en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$.