Applications

1 Notion d'application

1.1 Application

Définition 1 — Fonction, application : Soit E et F deux ensembles.

Une **fonction** de E dans F est un objet mathématique qui, à tout élément de E, associe *au plus* un élément de F.

Une **application** de E dans F est un objet mathématique qui, à tout élément de E, associe *exactement* un élément de F.

On dira dans les deux cas que f est à valeurs dans F.

R Autrement dit, il peut y avoir des éléments de l'ensemble de départ qui n'ont pas d'image par une fonction, alors que tout élément de l'ensemble de départ à une image par une application.
Pour obtenir une application à partir d'une fonction, il suffit de se restreindre à son domaine de définition...
Autant dire que nous allons volontiers confondre les deux notions.

Définition 2 : Deux applications f et g sont **égales** si et seulement si elles ont **même ensemble de départ** E, **même ensemble d'arrivée** F, et si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

■ **Exemple 1 :** Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \ln(1+\mathrm{e}^{-x}),\ g(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{x}).$$

Les applications f et g sont égales. En effet, elles sont toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$$f(x) = x + \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = \ln(\mathrm{e}^{x}) + \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = \ln(\mathrm{e}^{x} \times (1+\mathrm{e}^{-x})) = \ln(\mathrm{e}^{x}+1) = g(x).$$

1.2 Application identité

Définition 3 — Application identité : Soit E un ensemble.

On appelle **application identité** de E, notée id_E, l'application de E dans E définie par

$$\forall x \in E, \mathrm{id}_E(x) = x.$$

Propriété 1 : Soit $f : E \to F$ une application. Alors

$$f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_F \circ f = f.$$

Autrement dit, composer une application par l'identité ne change pas l'application en question (un peu comme lorsque l'on multiplie un réel par 1 ou qu'on lui ajoute 0).

2 Image directe

Définition 4 — Image directe : Soit $f : E \to F$ une application et A un sous-ensemble de E.

L'**image directe** de A, notée $f(A)$, est l'ensemble défini par $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.
Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des images des éléments de A.

En particulier, l'image directe de E est noté $f(E)$ ou $\mathrm{Im} f$ et est appelée **image** de f.

■ **Exemple 2 :** Soit $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$.

On a alors $f([3;4]) = [9;16]$ et $f(]-1;2[) = [0;4[$.

■ **Exemple 3 :** On a $\exp(\mathbb{R}) =]0;+\infty[$ et $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$.

3 Injectivité, Surjectivité

3.1 Injectivité

Définition 5 — Application injective : Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que f est injective si

$$\forall x, x' \in E,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Autrement dit, deux réels différents de l'ensemble de départ ont forcément deux images différentes dans l'ensemble d'arrivée.

Par contraposée, cette définition est équivalente à

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Autrement dit, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet *au plus* un antécédent dans l'ensemble de départ.

Méthode 1 : Pour montrer qu'une application est injective, on utilisera en général la définition contraposée.

- On pose x et x' tels que $f(x) = f(x')$;
- On montre que nécessairement on a $x = x'$

■ **Exemple 4 :** On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x+2 \end{array} \right.$. Montrons que f est injective.

Soit x et x' deux réels tels que $f(x) = f(x')$. On a alors $4x+2 = 4x'+2$ et donc $4x - 4x' = 2-2$ soit $4(x-x') = 0$.
Finalement, on a $x - x' = 0$ et donc $x = x'$.

Conclusion : L'application f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Méthode 2 : Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il suffit de trouver deux réels distincts de l'ensemble de départ qui ont la même image par f.

■ **Exemple 5 :** On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$.

On a alors $f(-1) = 1$ et $f(1) = 1$. Or, $-1 \neq 1$.

Conclusion : L'application f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

R Attention : l'injectivité dépend énormément du domaine de départ ! Reprenons l'exemple précédent en modifiant légèrement cet ensemble.

■ **Exemple 6 :** On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$.

Soit x et x' deux réels positifs tels que $f(x) = f(x')$. On a alors $x^2 = x'^2$ et donc $x^2 - x'^2 = 0$.

Ainsi, en factorisant cette expression, on a $(x - x')(x + x') = 0$. Il y a alors deux possibilités.

- Soit x et x' sont tous les deux nuls... Mais dans ce cas, on a $x = x'$!
- Soit l'un des deux n'est pas nul et donc $x + x' \neq 0$. On a donc $x - x' = 0$ et donc $x = x'$.

Dans tous les cas, on aboutit donc à $x = x'$.

Conclusion : L'application f est injective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété 2 : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications injectives. Alors $g \circ f : E \to G$ est injective.

Démonstration 1 : Soit x et x' deux réels de l'ensemble E tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

On a alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque g est injective, on a donc $f(x) = f(x')$. Puisque f est injective, on a donc $x = x'$.

Ainsi, $g \circ f$ est injective de E dans G. □

3.2 Surjectivité

Définition 6 — Application surjective : Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que f est **surjective** si

$$\forall y \in F, \exists x \in E \,|\, y = f(x).$$

Autrement dit, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet *au moins* un antécédent dans l'ensemble de départ.

♥ **Méthode 3 :** Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective.

- On pose un élément y dans l'ensemble F ;
- On montrer que l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution **dans l'ensemble de départ**...
  - Soit en résolvant l'équation ;
  - Soit en posant un x particulier et en calculant $f(x)$;
  - Soit en utilisant un théorème (théorème des valeurs intermédiaires, que nous reverrons).

■ **Exemple 7 :** On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x+2 \end{array} \right.$. Montrons que f est surjective.

Soit $y \in \mathbb{R}$ (ensemble d'arrivée) et $x \in \mathbb{R}$ (ensemble de départ). On a alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 4x+2 \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{4}.$$

Par ailleurs, on a bien $\frac{y-2}{4} \in \mathbb{R}$ (ensemble de départ).

Conclusion : L'application f est surjective.

■ **Exemple 8 :** On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$. Montrons que f est surjective.

Soit $y \in \mathbb{R}_+$ (ensemble d'arrivée). Posons alors $x = \sqrt{y}$. On a alors $f(x) = \sqrt{y}^2 = y$.

Conclusion : L'application f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Méthode 4 : Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, on cherche un réel de l'ensemble d'arrivée qui n'admet aucun antécédent par f.

■ **Exemple 9 :** On considère l'application $\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \right.$.

Pour tout réel x, on sait $e^x > 0$. Ainsi, le réel 0 n'admet aucun antécédent par exp.

Conclusion : L'application exp n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

R Cette fois, c'est le domaine d'arrivée qui est important. Si on considère l'application $\exp : \mathbb{R} \to]0;+\infty[$, on a cette fois une application surjective.

Propriété 3 : Soit $f : E \to F$ une application.

Alors f est surjective si et seulement si $F = f(E)$.

Démonstration 2 : Cela vient de la définition de l'image de f. □

Propriété 4 : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications surjectives. Alors $g \circ f : E \to G$ est surjective.

Démonstration 3 : Soit $z \in G$.

Puisque g est surjective de F sur G, alors il existe un réel $y \in F$ tel que $g(y) = z$.

Or, puisque f est surjective de E sur F, alors il existe un réel $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

On a donc $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. x est donc un antécédent de z par $g \circ f$. La fonction $g \circ f$ est donc surjective de E dans G. □

4 Bijectivité

4.1 Application bijective

Définition 7 — Application bijective : Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \,|\, y = f(x).$$

Autrement dit, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet *exactement* un antécédent dans l'ensemble de départ.

Méthode 5 : Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective.

- On pose un élément y dans l'ensemble F ;
- On montrer que l'équation $y = f(x)$ admet **une unique solution dans l'ensemble de départ**...
  - Soit en résolvant l'équation et en trouvant une seule solution ;
  - Soit en utilisant un théorème (théorème de la bijection, à venir).

Si l'une de ces équations n'admet aucune solution, c'est que l'application n'est pas surjective.
Si l'une de ces équations admet plusieurs solutions, c'est que l'application n'est pas injective.

■ **Exemple 10 :** Montrons que toute fonction affine non constante est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

On considère donc l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \right.$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = ax+b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}.$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc exactement une solution sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : L'application f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

■ **Exemple 11 :** On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{2x-4} \end{array} \right.$. Montrons que f est bijective.

Soit donc $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. On a

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{2x-4} \Leftrightarrow (2x-4)y = 2x+3 \Leftrightarrow 2xy - 2x = 4y+3 \Leftrightarrow x = \frac{4y+3}{2y-2}.$$

Remarquons que, puisque l'on a $x \neq 2$, alors $2x-4 \neq 0$ et puisque $y \neq 1$, on a $2y-2 \neq 0$, ce qui nous permet de multiplier et diviser librement par ces deux quantités.

Ainsi, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans l'ensemble de départ.

Conclusion : L'application f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

4.2 Bijection réciproque

Définition 8 — Bijection réciproque : Soit $f : E \to F$ une application bijective.

On appelle bijection réciproque de f, notée f^{-1}, l'application $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f. \end{array} \right.$

■ **Exemple 12 :** L'application $\ln : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right.$ est la bijection réciproque de $\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right.$.

■ **Exemple 13 :** L'application $\sqrt{\cdot} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ est la bijection réciproque de $\cdot^2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$.

Méthode 6 : Pour déterminer la bijection réciproque d'une application bijective, on procède comme l'on a fait précédemment, en résolvant l'équation $y = f(x)$.

■ **Exemple 14 :** La bijection réciproque de $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{2x-4} \end{array} \right.$ est $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ y & \mapsto & \dfrac{4y+3}{2y-2} \end{array} \right.$.

Il s'agit ni plus ni moins que de l'exemple de la partie précédente.

Propriété 5 : Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Démonstration 4 : Supposons que f est bijective de E dans F.

- Soit $y \in F$. Puisque f est bijective de E dans F, le réel y admet un unique antécédent par f, que l'on note x. On a alors $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$. Ainsi, $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ et donc $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.
- Soit $x \in E$ et $y = f(x)$. On a alors $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$.
  Or, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution antécédent de y par f, c'est-à-dire x.
  Ainsi, $f^{-1}(f(x)) = x$ et donc $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

□

Propriété 6 : Soit $f : E \to F$ une application.

Alors f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Dans ce cas, l'application g est unique et on a alors $g = f^{-1}$.

Démonstration 5 : Supposons que f est bijective. Dans ce cas, il suffit de prendre $g = f^{-1}$ et on a les égalités voulues d'après la proposition précédente.

Supposons désormais qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, montrons alors que f est bijective, en montrant qu'elle est injective et surjective.

- Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. On a alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or, $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
  On a donc $\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x')$ c'est-à-dire $x = x'$. f est donc injective.
- Soit $y \in F$. Posons alors $x = g(y)$. D'abord, on a bien $x \in E$. De plus, $f(x) = f(g(y))$. Or, $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
  Il en vient que $f(x) = \mathrm{id}_F(y)$, c'est-à-dire $f(x) = y$. f est donc surjective.

Finalement, l'application f est bien bijective de E dans F.

Montrons alors l'unicité de l'application g. Supposons qu'il existe deux applications g_1 et g_2 qui vérifient $g_1 \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g_2 = \mathrm{id}_F$ ainsi que $g_2 \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g_2 = \mathrm{id}_F$.

On a alors $f \circ g_1 = f \circ g_2$. En composant par g_1, on a alors $g_1 \circ f \circ g_1 = g_1 \circ f \circ g_2$.

Or, $g_1 \circ f = \mathrm{id}_E$. Ainsi, $\mathrm{id}_E \circ g_1 = \mathrm{id}_E \circ g_2$ et donc $g_1 = g_2$. □

Méthode 7 : Lorsque deux fonctions f et g sont données, si en calculant $g \circ f$ et $g \circ f$, on retrouve l'application identité, cela signifie que f et g sont bijectives, réciproques l'une de l'autre.

■ **Exemple 15 :** Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1;+\infty[& \to & [1;+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+2x+2 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & [-1;+\infty[\\ x & \mapsto & -1+\sqrt{x-1} \end{array} \right.$.

Vérifions d'abord les ensembles de départ et d'arrivée de ces deux fonctions.

- f est définie sur $\mathbb{R}$. La restreindre à un espace plus petit ne pose donc aucun souci.
  Soit $x \geqslant -1$. On a $f(x) = x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geqslant 1$. Ainsi, f est bien à valeurs dans $[1;+\infty[$.
- Soit $x \geqslant 1$. On a donc $x-1 \geqslant 0$, on peut donc calculer $\sqrt{x-1}$.
  Par ailleurs, $\sqrt{x-1} \geqslant 0$ et donc $g(x) \geqslant -1$. g est bien à valeurs dans $[-1;+\infty[$.

Soit donc $x \in [1;+\infty[$. On a

$$f \circ g(x) = f(-1+\sqrt{x-1}) = (-1+\sqrt{x-1})^2+2\times(-1+\sqrt{x-1})+2 = 1-2\sqrt{x-1}+x-1-2+2\sqrt{x-1} = x.$$

Soit maintenant $x \in [-1;+\infty[$. On a

$$g \circ f(x) = g(x^2+2x+2) = -1+\sqrt{x^2+2x+2-1} = -1+\sqrt{(x+1)^2} = -1+|x+1|.$$

Or, puisque $x \geqslant -1$, on a donc $x+1 \geqslant 0$ et donc $|x+1| = x+1$. Finalement,

$$g \circ f(x) = -1+x+1 = x.$$

Conclusion : L'application f est bijective de $[-1;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$.
L'application g est bijective de $[1;+\infty[$ dans $[-1;+\infty[$.
On a de plus $g = f^{-1}$.

Propriété 7 : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors

- f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

R Il faut faire attention à l'ordre pour cette dernière propriété.
Souvenez-vous que le matin vous mettez vos chaussettes puis vos chaussures, alors que le soir, vous enlevez vos chaussures puis vos chaussettes.

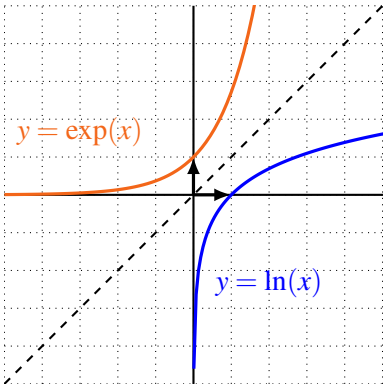
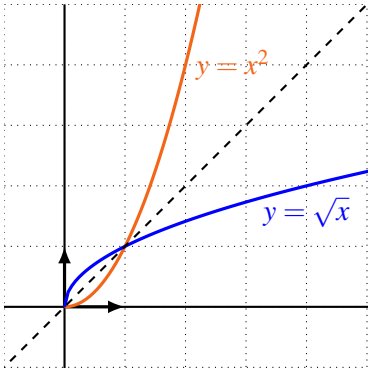
Démonstration 6 : Le premier point est immédiat d'après les deux propriétés précédentes.

Par ailleurs,

$$g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = f \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_G$$

et

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

On conclut d'après la proposition précédente. □

Propriété 8 : Soit f une application bijective, de réciproque f^{-1}.
Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ leurs courbes respectives dans un repère ORTHONORMÉ.
Alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.