# Applications

### ► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2+4x-7 \end{array} \right.$.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $m$ l'équation $f(x) = m$ admet-elle au moins une solution ?
2. En déduire $f(\mathbb{R})$.
3. Déterminer un ensemble $I$ pour que l'application $g : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & f(\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & 2x^2+4x-7 \end{array} \right.$ soit bijective.

### ► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{array} \right.$.

1. Calculer $f(2)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. L'application $f$ est-elle injective ?
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

### ► Exercice 3 – Voir le corrigé

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives de leur ensemble de départ dans leur ensemble d'arrivée ?

$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+\mathrm{e}^x) \end{array} \right.$ $\quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array} \right.$ $\quad h : \left| \begin{array}{ccc} ]0;+\infty[ & \to & [4;+\infty[ \\ x & \mapsto & \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 \end{array} \right.$

### ► Exercice 4 – Voir le corrigé

Dans chaque cas, montrer que $f$ est bijective de son ensemble de départ vers son ensemble d'arrivée et donner l'expression de sa bijection réciproque.

$f : \left| \begin{array}{ccc} [1;+\infty[ & \to & [1;+\infty[ \\ x & \mapsto & \exp(\ln(x)^2) \end{array} \right.$ $\quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & ]-1;1[ \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} \end{array} \right.$ $\quad h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [0,1[ \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{1+x^2} \end{array} \right.$

### ► Exercice 5 – Voir le corrigé

Dans chaque cas, déterminer si $f$ est injective, surjective, bijective.

$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array} \right.$ $\quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$ $\quad h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y;x-y) \end{array} \right.$

### ► Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit $f : E \to E$ une application. On dit que $f$ est une involution de $E$ si $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

1. Justifier que toute involution est bijective.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
3. Soit $a$ un réel. Montrer que la fonction $x \mapsto a-x$ est une involution de $\mathbb{R}$.
4. Soit $a$ et $b$ deux réels, avec $b \neq 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{b}{x-a}+a$ est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

### ► Exercice 7 – Voir le corrigé

Soit $f : \left| \begin{array}{rcl} [1;+\infty[ & \to & [0;+\infty[ \\ x & \mapsto & \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{rcl} [0;+\infty[ & \to & [1;+\infty[ \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array} \right.$.

1. Vérifier que $f$ est bien à valeurs dans $[0;+\infty[$.
2. Vérifier que $g$ est bien à valeurs dans $[1;+\infty[$.
3. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

### ► Exercice 8 – Voir le corrigé

On considère les applications $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (2x-y;y-x) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\ ,\ ,y) & \mapsto & (x+y;x+2y) \end{array} \right.$.

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

### ► Exercice 9 – Voir le corrigé

Montrer que la réciproque d'une fonction bijective impaire est aussi impaire.
Que dire pour une fonction paire ?

### ► Exercice 10 – Voir le corrigé

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que $f$ est injective.
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que $g$ est surjective.

### ► Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit $f : E \to F$ une application strictement monotone. Montrer que $f$ est injective.

Déterminer alors les solutions de l'équation $x + e^x = 1$ sur $\mathbb{R}$.

### ► Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$.
Montrer que $f$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

### ► Exercice 13 – Voir le corrigé

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective telle que, pour tout entier naturel $n$, $f(n) \leqslant n$.
Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $f(n) = n$.