Convergence des suites

1 Limite d'une suite

1.1 Limite finie : suite convergente

Définition 1 : Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

On dit que (u_n) *converge* vers ℓ (ou que u_n *tend vers* ℓ lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon[$$

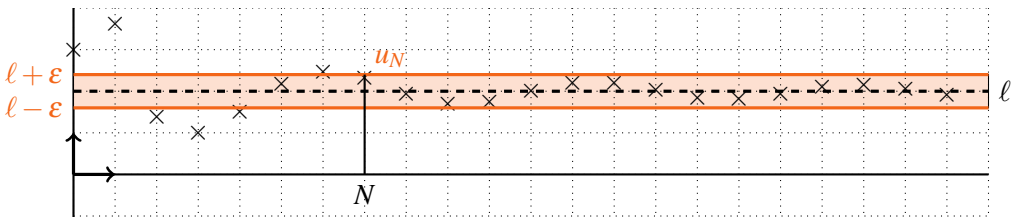
ou de manière équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

R L'intérêt est que le ε que l'on considère peut être aussi petit que l'on veut. Autrement dit, (u_n) converge vers ℓ si tous les termes de cette suite sont « très proches » de ℓ à partir d'un certain rang.

Remarquons par ailleurs que dans l'ordre des quantificateurs, N apparaît après ε et dépend donc de ce dernier.

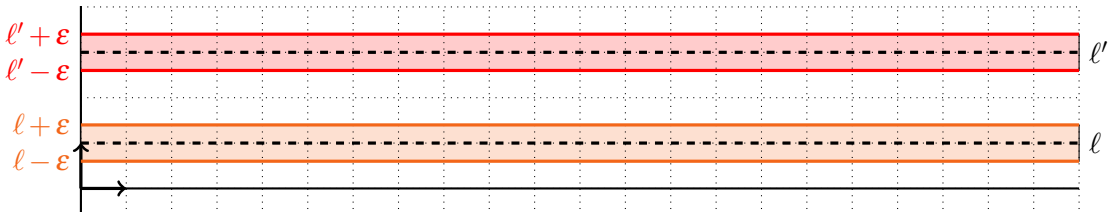
Illustration : On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous.



La suite (u_n) semble tendre vers 2. Par exemple, pour $\varepsilon = 0,4$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2-\varepsilon;2+\varepsilon[$, soit $]1,6\,;\,2,4[$ à partir du rang 7. Ce raisonnement vaut pour n'importe quel ε, aussi petit soit-il.

Propriété 1 — Unicité de la limite : Soit (u_n) une suite réelle, ℓ et ℓ' deux réels.
Si u_n tend vers ℓ et u_n tend vers ℓ' lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\ell = \ell'$.

L'idée de la démonstration suivante est assez simple : elle consiste à montrer l'impossibilité d'être à la fois très proche de ℓ et de ℓ' si ces deux valeurs sont différentes. Pour cela, on va trouver une valeur de ε pour lesquels les intervalles $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ et $]\ell'-\varepsilon,\ell'+\varepsilon[$ sont disjoints, ce qui contredira le fait que ces deux intervalles doivent tous deux contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Démonstration 1 : Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq \ell'$, par exemple que $\ell > \ell'$. Soit ε un réel strictement positif.

- Puisque u_n tend vers ℓ en $+\infty$, l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. En particulier, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à $\ell-\varepsilon$
- Puisque u_n tend vers ℓ' en $+\infty$, l'intervalle $]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En particulier, à partir d'un certain rang N', tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à $\ell'+\varepsilon$

Ainsi, à partir de la plus grande valeur entre N et N', les termes de la suite sont à la fois strictement supérieurs à $\ell-\varepsilon$ et strictement inférieurs à $\ell'+\varepsilon$. Autrement dit, pour tout entier $n \geqslant \max(N,N')$, on a $\ell-\varepsilon < u_n < \ell'+\varepsilon$.

Puisque cela vaut pour n'importe quelle valeur de ε, cela reste vrai en prenant par exemple $\varepsilon = \dfrac{\ell-\ell'}{2}$ (ce réel est bien strictement positif puisque $\ell > \ell'$).

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant \max(N,N')$, on a $\ell - \dfrac{\ell-\ell'}{2} < u_n < \ell' + \dfrac{\ell-\ell'}{2}$ et donc $\dfrac{\ell+\ell'}{2} < u_n < \dfrac{\ell+\ell'}{2}$ et en particulier $\dfrac{\ell+\ell'}{2} < \dfrac{\ell+\ell'}{2}$. C'est impossible : notre supposition de départ, qui était que $\ell \neq \ell'$ était donc erroné. Par conséquent, on a $\ell = \ell'$. □

Cette propriété nous permet de définir sans ambiguïté la notion de limite d'une suite.

Définition 2 — Limite finie, suite convergente : Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

Si u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$, on dit que ℓ est **LA** *limite* de la suite (u_n) en $+\infty$.

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Une suite qui admet une limite finie est dite *convergente*.

Dans le cas contraire, on parle de suite *divergente*.

■ **Exemple 1 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{2n+1}{4n+5}$.

Pour se faire une idée de la limite, il est possible de calculer quelques termes de la suite. Ainsi, $u_0 = \dfrac{1}{5}$, $u_{10} = \dfrac{21}{45} \simeq 0.467$, $u_{100} = \dfrac{201}{405} \simeq 0.496...$ Il semble que la suite soit convergente et que sa limite vaille $\dfrac{1}{2}$.

Pour le prouver formellement, repassons pas la définition : pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, il faut trouver un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \in \left]\dfrac{1}{2}-\varepsilon; \dfrac{1}{2}+\varepsilon\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{4n+2}{2(4n+5)} - \frac{4n+5}{2(4n+5)} = \frac{-3}{2(4n+5)}$$

Cette quantité est négative. On a alors

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2(4n+5)}.$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$. Ainsi,

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{2(4n+5)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n+5} < \frac{2\varepsilon}{3} \Leftrightarrow 4n+5 > \frac{3}{2\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4}$, on a $u_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon; \frac{1}{2} + \varepsilon\right[$.

La suite (u_n) est bien convergente et sa limite vaut $\frac{1}{2}$.

Par exemple, si $\varepsilon = 0.001$, on a $\frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4} = 374.99$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 375$, on a $0.499 \leqslant u_n \leqslant 0.501$.

Propriété 2 : Si une suite est convergente, elle est bornée.
Par contraposée, si une suite n'est pas bornée, elle ne peut être convergente.

La réciproque est fausse : toute suite bornée n'est pas convergente.

Par exemple, pour tout n, prenons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. En revanche, elle n'est pas convergente : ses termes de rangs pairs valent tous 1 et ses termes de rangs impairs valent tous -1. Une limite étant unique, la suite (u_n) ne peut être convergente.

1.2 Limite infinie

Définition 3 — Limite infinie : Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (ou que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque,

  $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A.$$

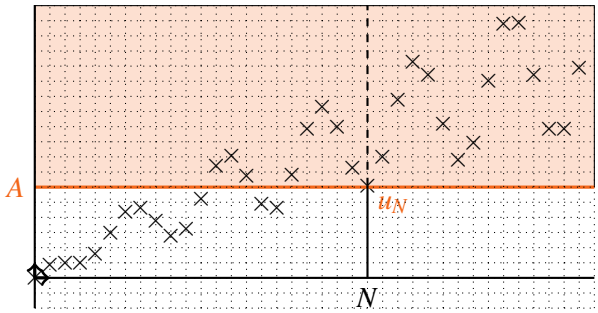
  On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ (ou que u_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque,

  $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant A.$$

  On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

La première définition traduit le fait que la suite dépasse n'importe quel seuil donné sans jamais repasser en dessous par la suite. Attention, cela ne signifie pas que les termes de la suite sont de plus en plus grands ; une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

Illustration : On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous. On se fixe un seuil $A = 6$.



On remarque que $u_{12} \geqslant 6$. Cependant, certains des termes suivants sont inférieurs à 6 : pour qu'une suite tende vers $+\infty$, il faut que **tous les termes** à partir d'un certain rang soient au-dessus du seuil A, et ce, peu importe le seuil A. On voit ainsi que, pour tout $n \geqslant 22$, il semblerait qu'on ait bien $u_n \geqslant 6$.

Le raisonnement que nous venons de tenir pour $A = 6$ tient pour toutes les valeurs de A, aussi grandes soient-elles : la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Il faut par ailleurs remarquer et insister **lourdement** sur le fait qu'une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante. Cette suite ici représentée en est un exemple. Il est également faux de dire qu'une suite qui est strictement croissante tend forcément vers $+\infty$.

■ **Exemple 2 :** Pour tout n, on pose $u_n = n^2$. u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En effet, fixons un réel A.

- Si $A < 0$, alors pour tout entier naturel n, on aura $u_n > A$.
- Si $A \geqslant 0$, alors pour tout entier n supérieur ou égal à $\sqrt{A}$, on a $n^2 \geqslant \sqrt{A}^2$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}+$. Ceci revient à dire que $u_n \geqslant A$.

Dans tous les cas, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont au-dessus de A, peu importe le réel A choisi : la suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.

Il y a une différence entre une suite qui tend vers $+\infty$ et une suite non majorée. : évidemment, toute suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée, puisque pour tout réel A, il y a des termes de la suite supérieurs à A.

La réciproque est en revanche fausse sans davantage d'hypothèse sur la suite. Considérons par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (1+(-1)^n)n$. La suite (u_n) n'est pas majorée : elle a des termes arbitrairement grands. Cependant, elle ne tend pas non plus vers $+\infty$ puisqu'un terme sur deux de cette suite vaut 0. Elle ne reste donc pas supérieure à n'importe quel réel donné à partir d'un certain rang (elle est en particulier en dessous de 1 tous les termes impairs).

1.3 Limites de suites usuelles

Propriété 3 — Limites usuelles : Les limites suivantes sont à connaître.

- Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$

La suite $((-1)^n)$ n'admet quant à elle pas de limite en $+\infty$.

2 Suites extraites

Propriété 4 : Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Alors toute sous-suite de (u_n) tend également vers ℓ. En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell.$$

Ce résultat sera notamment très utile lorsque nous aborderons le cas des suites définies par récurrence.

En revanche, ce n'est pas parce que certaines sous-suites convergent que la suite d'origine convergera elle aussi.

Par contraposée, on a en effet le résultat suivant : si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers deux réels différents (ou si l'une converge et l'autre diverge, ou...) , alors la suite (u_n) diverge.

■ **Exemple 3 :** On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.

Pour tout entier naturel n, on a $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.

Conclusion : Ainsi, la suite (u_n) est divergente.

Un cas particulier est toutefois à noter, donné par la propriété suivante.

Propriété 5 : Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc $u_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2\times(2n)+1} = \dfrac{1}{4n+1}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} = -\dfrac{1}{4n+3}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.

Conclusion : Puisque les suites (u_n) et (u_{2n}) convergent toutes deux vers la même limite (ici 0), alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3 Opérations sur les limites

3.1 Limite de la somme

Propriété 6 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels ℓ_1 et ℓ_2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Indéterminé**

Démonstration 2 : On s'intéresse ici au cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Soit donc A un réel.

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier naturel N_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant N_1$, on a $u_n \geqslant A$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un entier naturel N_2 tel que, pour tout entier $n \geqslant N_2$, on a $u_n \geqslant 0$.

Posons alors $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a $u_n + v_n \geqslant A + 0$ et donc $u_n + v_n \geqslant A$.
Ainsi, on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$ □

■ **Exemple 5 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n^2 + \mathrm{e}^{-n} - 4$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-4) = -4$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Les cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ n'obéissent à aucune règle précise : il faut les traiter séparément.

L'expression "Forme indéterminée" ne signifie pas qu'il est impossible de déterminer une éventuelle limite : il précise simplement qu'il nous est impossible d'appliquer directement les règles de calcul sur les limites de suite. La limite de la somme peut alors aussi bien être 0, 1, $+\infty$, $-\infty$ ou peut même ne pas exister du tout !

■ **Exemple 6 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n$, $v_n = 1-n$ et $w_n = n^2+n$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Il n'est pas possible de conclure sur l'éventuelle limite de la suite (u_n+v_n) avec ces seules informations.

Or, pour tout entier naturel n, $u_n+v_n = 1$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = 1$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Là encore, il n'est pas possible de conclure sur l'éventuelle limite de la suite (v_n+w_n) avec ces seules informations.

Or, pour tout entier naturel n, $v_n+w_n = n^2+1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n+w_n) = +\infty$.

Nous avons là deux exemples où la somme de limites "$\infty-\infty$" produit des résultats totalement différents.

3.2 Limite du produit

Propriété 7 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels ℓ_1 et ℓ_2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	$\ell_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_2	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n)$	$\ell_1\ell_2$	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**Indéterminé**

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 7 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \left(\frac{3}{n}-4\right)\times(n^2+2\sqrt{n})$. On a

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}-4\right) = -4$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+\sqrt{n}) = +\infty$.
- Finalement, d'après les règles de calcul de limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

■ **Exemple 8 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \frac{2}{n}$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$.

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, $u_n v_n = 2$.
  Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 2$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, $u_n w_n = 2n$.
  Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$.

Nous avons ici deux situations où le produit de limite "$0\times\infty$" conduit à des résultats différents.

3.3 Limite du quotient

Définition 4 : Soit (u_n) une suite réelle et a un réel.

- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a^+$ si u_n tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$ ET s'il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n \geqslant a$.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a^-$ si u_n tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$ ET s'il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n \leqslant a$.

■ **Exemple 9 :** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Or, pour tout entier naturel non nul n, $1-\dfrac{1}{n} \leqslant 1$. On pourra alors écrire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1^-$.

Cette petite subtilité nous est notamment utile lorsque l'on étudie la limite de quotients dans certains cas...

Propriété 8 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On considère deux réels l_1 et l_2, avec $l_2 \neq 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	ℓ_1	$\ell_1 \neq 0$	∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell_2 \neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	l_2, 0^+ ou 0^-	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**Indéterminé**	

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 10 :** Pour tout entier naturel non nul n on pose $u_n = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{3+n}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(3+n) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

■ **Exemple 11 :** Pour tout entier naturel non nul n on pose $u_n = \dfrac{1-n}{\mathrm{e}^{-n}+\frac{1}{n}}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{e}^{-n}+\frac{1}{n} \geqslant 0$.

On a en fait $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{1}{n}\right) = 0^+$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (ne pas oublier d'appliquer la règle des signes !).

4 Croissances comparées

Les croissances comparées sont un outil permettant de lever certaines formes indéterminées.

Propriété 9 : Soit a et b des réels strictement positifs. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\mathrm{e}^n)^a}{n^b} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{\ln(n)^b} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\mathrm{e}^n)^a}{\ln(n)^b} = +\infty$$

et donc également,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{(\mathrm{e}^n)^a} = 0^+ \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^b}{n^a} = 0^+ \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^b}{(\mathrm{e}^n)^a} = 0^+$$

Toute puissance de $\exp(n)$ l'emporte sur toute puissance de n, qui l'emporte sur toute puissance de $\ln(n)$.

Si q est un réel strictement supérieur à 1, on peut alors généraliser ces croissances comparées en utilisant la notation exponentielle. En effet, pour tout entier naturel n, on a alors $q^n = \mathrm{e}^{n\ln(q)} = (\mathrm{e}^n)^{\ln(q)}$ avec $\ln(q) > 0$.

Propriété 10 : Soit a un réels strictement positif. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^b} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{q^n} = 0^+$$

■ **Exemple 12 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n^3\left(\frac{1}{5}\right)^n$. On a alors $u_n = \frac{n^3}{5^n}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5 Formes indéterminées

Méthode 1 : Pour lever une forme indéterminée :

- On s'assure que l'on a en effet une forme indéterminée en essayant d'appliquer les règles de calcul sur les limites
- On a alors deux possibilités :
  - factoriser par les termes qui divergent le plus vite (terme de plus haut degré ou via les croissances comparées) ;
  - lorsqu'il y a des racines carrées, utiliser la quantité conjuguée.
- On simplifie l'expression puis on conclut en revenant aux règles opératoires sur les limites.

5.1 Factorisation par le terme dominant

■ **Exemple 13 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 4n^2 + 2n + 3$ et $v_n = 3n^2 + 7n - 1$.

On cherche à déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$. Or, en utilisant les règles sur les calculs de limites, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. On se retrouve dans le cas "$\frac{\infty}{\infty}$".

Il est toutefois possible de factoriser u_n et v_n par leur terme de plus haut degré (ici, n^2 dans les deux cas).

Pour tout entier non nul n, on a donc

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{4n^2+2n+3}{3n^2+7n-1} = \frac{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right) = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = 3$.

Conclusion : Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{4}{3}$.

Encore une fois, avant de se lancer dans la factorisation par le terme dominant, il faut s'assurer que celle-ci est nécessaire : en voulant lever une forme indéterminée inexistante, on peut très vite se retrouver à en créer une involontairement.

R Lorsque l'on souhaite utiliser des croissances comparées, il est impératif de les faire apparaître sous la forme d'un quotient.

Il est par ailleurs important de bien préciser que vous utilisez les croissances comparées lorsque c'est le cas !

■ **Exemple 14 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{ne^n - \ln(n)}{n^4 - e^{2n}}$.

Le terme prépondérant au numérateur est ne^n, le terme prépondérant au dénominateur est e^{2n}. Pour tout entier naturel non nul n, on a

$$u_n = \frac{ne^n}{e^{2n}} \times \frac{1-\frac{\ln(n)}{ne^n}}{\frac{n^4}{e^{2n}}-1} = \frac{n}{e^n} \times \frac{1-\frac{\ln(n)}{ne^n}}{\frac{n^4}{e^{2n}}-1}.$$

Or, par croissances comparées, on a $\frac{n}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{n^4}{e^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, $\frac{\ln(n)}{ne^n} = \frac{\ln(n)}{n} \times \frac{1}{e^n}$.

Or, par quotient, $\frac{1}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par croissances comparées, $\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\frac{\ln(n)}{ne^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On conclut alors en appliquant les règles opératoires.

Conclusion : Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5.2 Quantité conjuguée

La partie suivante s'intéresse aux formes indéterminées faisant intervenir des racines carrées.

Propriété 11 : Soit (u_n) une suite réelle positive et a un réel positif.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n} = +\infty$.

Nous généraliserons très bientôt cette propriété à toute fonction continue...

■ **Exemple 15 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{n}$.

D'une part, pour tout entier naturel non nul n, $4n^2+1 = n^2\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc

$$\sqrt{4n^2+1} = \sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{n^2}\times\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} = n\times\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right) = 4$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$.

Lorsque l'on est en présence d'une différence de racines carrées $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

L'objectif est ici d'utiliser l'identité remarquable $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$. En particulier, dans le cas des racines carrées, cela entraîne que, pour tous réels strictement positifs a et b,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2 = a-b.$$

■ **Exemple 16 :** Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$. Il s'agit de la différence de deux termes qui tendent vers $+\infty$, il n'est pas possible de conclure directement sur sa limite. Or,

$$u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Le numérateur vaut 2 et le dénominateur tend vers $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

6.1 Passage à la limite

Théorème 3 — Passage à la limite : Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers deux réels ℓ et ℓ'.

On suppose qu'il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant v_n$. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

R On peut donc « passer à la limite » dans une inégalité. Attention, l'inégalité obtenue est forcément large ! Il faut par ailleurs avoir montré que cette limite existait bel et bien.

Le théorème précédent présente un cas particulier bien pratique lorsque l'une des deux suites est constante.

Théorème 4 — Passage à la limite : Soit (u_n) une suite convergente, N un entier naturel, m et M deux réels.

- Si pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant M$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$.
- Si pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant m$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant m$.

De même que pour le théorème précédent, l'inégalité du passage à la limite est toujours large.

6.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 5 — Théorème de comparaison 1 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant v_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration 6 : Soit N un entier naturel tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

Soit A un réel. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N' tel que, pour tout entier $n \geqslant N'$, on a $u_n \geqslant A$.

Ainsi, si $n \geqslant N'$ et $n \geqslant N$, on a que $v_n \geqslant u_n \geqslant A$ et par conséquent que $v_n \geqslant A$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □

Il n'y a rien de surprenant ici, si l'on fait preuve d'un brin de logique. Si une suite est plus grande qu'une suite qui devient plus grande que n'importe quel réel, alors elle devient elle-même plus grande que n'importe quel réel.

■ **Exemple 17 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n + (-1)^n$.

On sait que, pour tout entier naturel n, $(-1)^n \geqslant -1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant n-1$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$. Les termes de la suite (v_n) sont plus grands que ceux d'une suite qui tend vers $+\infty$,

Conclusion : d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 7 — Théorème de comparaison 2 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant v_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

■ **Exemple 18 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = ((-1)^n - 2)n$.

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \leqslant 1$ et donc $(-1)^n - 2 \leqslant -1$ puis $v_n \leqslant -n$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$.

Conclusion : d'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Dans les deux exemples précédents, il était possible d'encadrer les termes de la suite dont on souhaitait déterminer la limite. Ainsi, pour ce dernier exemple, on aurait pu préciser que, pour tout entier naturel n, on a $-3n \leqslant v_n \leqslant -n$. Cet encadrement est tout à fait juste mais seule l'une de ces inégalités (en l'occurrence, celle de droite), permet d'établir la limite de la suite. Être supérieur à une suite qui tend vers $-\infty$ n'a rien d'incroyable, alors qu'être inférieur à une telle suite est plus « exceptionnel ».

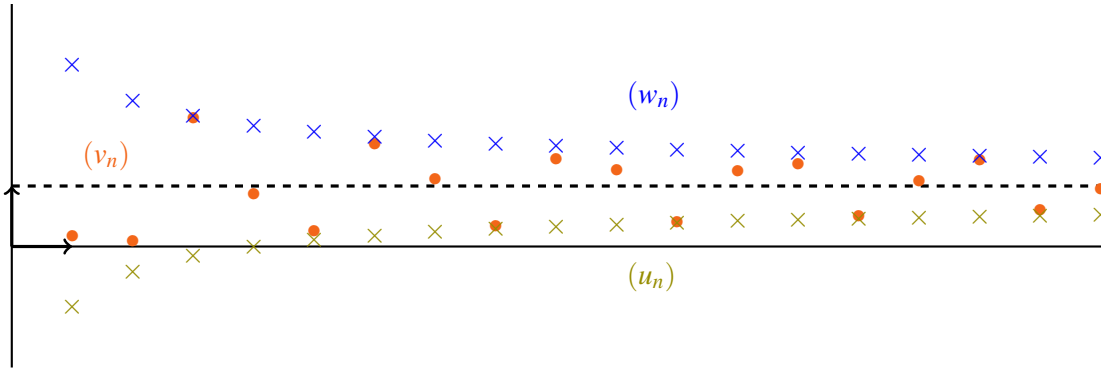
Toutefois, le prochain théorème ne pourra pas se contenter d'une simple inégalité...

6.3 Théorème d'encadrement

Théorème 8 : On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si les suites (u_n) et (w_n) sont convergentes et sont **de même limite** ℓ, alors la suite (v_n) est également convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Illustration : Sur l'exemple suivant, trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont représentées. Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si l'on sait que (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite, on en déduit la convergence et limite de la suite (v_n).



Ce théorème est également appelé « théorème des gendarmes ». Les suites (w_n) et (u_n) jouent ici le rôle des gendarmes qui encerclent leur cible, la suite (v_n). Peu à peu, les gendarmes se dirigent vers la prison. La suite (v_n), encerclée, n'a d'autre choix que de les suivre. D'autres noms plus ou moins évocateurs sont donnés à ce théorème : théorème des carabiniers ou théorème du sandwich par exemple.

Remarquons que ce théorème est avant tout un théorème qui établit la convergence d'une suite ! Encadrer les termes d'une suite par ceux de deux suites convergentes ne garantit pas la convergence de la suite encadrée.

Si toutefois, la suite est convergente, alors la limite de cette suite est comprise (au sens large) entre les limites des suites encadrantes. La convergence doit cependant être établi au préalable.

Démonstration 9 : Notons N l'entier à partir duquel on a, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Notons ℓ la limite commune des suites (u_n) et (w_n). Soit ε un réel strictement positif.

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe un entier N_u à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[$. En particulier, tous ces termes sont supérieurs à $\ell-\varepsilon$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, il existe un entier N_w à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) sont dans l'intervalle $]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[$. En particulier, tous ces termes sont inférieurs à $\ell+\varepsilon$.

Notons alors $N_v = \max(N, N_u, N_w)$. Cet entier est supérieur aux trois entiers N, N_u et N_w : les trois propriétés précédentes sont donc vérifiées.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N_v$, on a $\ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell+\varepsilon$ et en particulier, $\ell-\varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell+\varepsilon$.

Pour tout $n \geqslant N_v$, on a alors $v_n \in]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[$. On a bien montré que la suite (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ □

■ **Exemple 19 :** Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

On sait que, pour tout entier non nul n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et donc $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right) = 3$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

■ **Exemple 20 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{2n+\ln(n)}$.

Soit n un entier naturel non nul, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et donc $2n-1 \leqslant 2n+(-1)^n \leqslant 2n+1$.

Par ailleurs, puisque $n \geqslant 1$, on a $2n+\ln(n) \geqslant 0$, on peut donc diviser l'inégalité par cette quantité sans en changer le sens. Ainsi,

$$\frac{2n-1}{2n+\ln(n)} \leqslant v_n \leqslant \frac{2n+1}{2n+\ln(n)}.$$

Occupons-nous du membre de gauche. On a

$$\frac{2n-1}{2n+\ln(n)} = \frac{n}{n} \times \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{\ln(n)}{n}} = \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{\ln(n)}{n}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right) = 2$. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{\ln(n)}{n}\right) = 2$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{2n+\ln(n)} = 1$. De la même manière, on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{2n+\ln(n)} = 1$.

Conclusion : d'après le théorème de comparaison, la suite (v_n) converge et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Nous pouvons utiliser ce théorème pour démontrer un résultat bien pratique.

Propriété 12 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose qu'il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on a $|u_n| \leqslant v_n$.

Si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge aussi vers 0.

Démonstration 10 : Pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a alors $v_n \geqslant 0$ mais aussi $-v_n \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. D'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

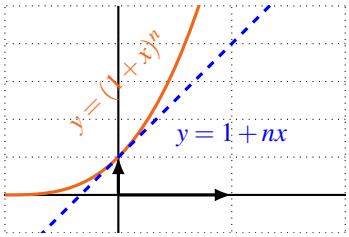
■ **Exemple 21 :** On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel non nul n, on a $|u_n - 3| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

7 Suites géométriques

Propriété 13 — Inégalité de Bernoulli : Soit a un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n, on a $(1+a)^n \geqslant 1+na$



Une interprétation graphique de cette inégalité est possible.
La droite d'équation $y = 1+nx$ n'est autre que la tangente à la courbe d'équation $y = (1+x)^n$ à l'abscisse 0. L'inégalité de Bernoulli dit donc que la courbe se trouve au-dessus de la tangente lorsque $x > 0$.

Démonstration 11 : Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Fixons-nous un réel a strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note alors $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $(1+a)^n \geqslant 1+na$ ».

- **Initialisation** : Prenons $n=0$.
  - D'une part, $(1+a)^0 = 1$.
  - D'autre part, $1+0\times a = 1$.

  On a bien $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
  En multipliant des deux côtés de l'inégalité par $(1+a)$, qui est strictement positif, on obtient alors que

  $$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a).$$

  Or,

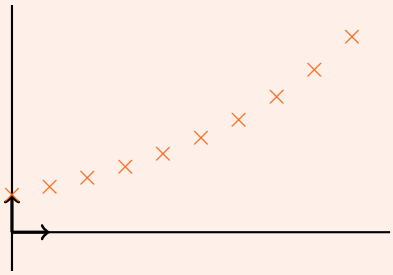
  $$(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a.$$

  Ainsi, $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, si pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

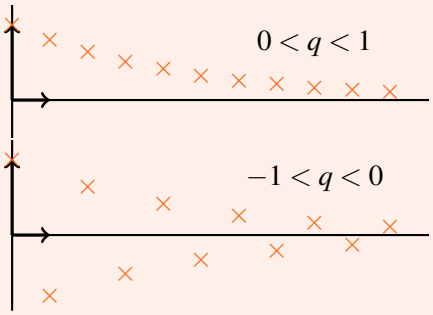
On a bien montré que, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$. □

Propriété 14 : Soit q un réel. On s'intéresse au comportement de la suite (q^n) selon la valeur de q.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.



- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.



- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Démonstration 12 : Traitons séparément les différents cas mentionnés ici :

Premier cas : $q > 1$: Pour tout entier naturel n, $q^n = (1+(q-1))^n$.

Or, $q-1 > 0$. Ainsi, d'après l'inégalité de Bernoulli, on a que, pour tout entier naturel n,

$$(1+(q-1))^n \geqslant 1+n(q-1)$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n(q-1)) = +\infty$. Finalement, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Deuxième cas : $-1 < q < 1$

- Si $q = 0$, le résultat est immédiat puisque la suite est constante égale à 0 à partir du rang 1.
- Si $0 < q < 1$, notons $p = \dfrac{1}{q}$. On a alors $p > 1$ et $q^n = \dfrac{1}{p^n}$.
  Or, d'après le point précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = +\infty$. Ainsi, en prenant l'inverse, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $-1 < q < 0$, alors, pour tout entier naturel n, $0 < |q| < 1$.
  Par ailleurs, pour tout entier naturel n, on a $-|q|^n < q^n < |q|^n$.

Or, d'après le cas précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-|q|^n) = 0$.
D'après le théorème d'encadrement, on a donc également $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Troisième cas : $q \leqslant -1$

Dans ce cas, $q^2 \geqslant 1$.

- D'une part, pour tout entier naturel k, $q^{2k} = (q^2)^k$. Ainsi, $\lim\limits_{k\to+\infty} q^{2k} = +\infty$.
- D'autre part, pour tout entier naturel k, $q^{2k+1} = q \times (q^2)^k$. On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} q^{2k+1} = -\infty$.
- Les termes de rangs pairs de la suite (q^n) tendent vers $+\infty$ et les termes de rangs impairs tendent vers $-\infty$. La suite (q^n) ne peut admettre de limite, finie ou infinie.

□

■ **Exemple 22 :** On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 4$.

Pour tout entier naturel n, on a alors $u_n = -2 \times 4^n$. Or, puisque $4 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.

Ainsi, en faisant la limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

■ **Exemple 23 :** Soit q un réel tel que $-1 < q < 1$. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

On sait que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Or, puisque $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1-q}$.

■ **Exemple 24 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 4$. On souhaite déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) en $+\infty$.

La suite (u_n) est arithmético-géométrique. Déterminons alors son terme général.

1. On considère l'équation caractéristique $x = \frac{1}{5}x + 4$. L'unique solution de cette équation est $x = 5$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 5$. Montrons que la suite (v_n) ainsi définie est géométrique. Pour tout entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{1}{5}u_n + 4 - 5 = \frac{1}{5}u_n - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 5) = \frac{1}{5}v_n.$$

   Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.
3. Puisque $v_0 = u_0 - 5 = 3 - 5 = -2$, on a donc que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = -2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \qquad \text{et} \qquad u_n = v_n + 5 = 5 - 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Or, puisque $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$.

Conclusion : par somme, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

■ **Exemple 25 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{1-4^n}{2+3^n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

On se retrouver avec une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. Or, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{4^n}{3^n} \times \frac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{2}{3^n}+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{2}{3^n}+1}.$$

Or, puisque $\dfrac{4}{3} > 1$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{2}{3^n}+1} = -1$.

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

8 Convergence des suites monotones

8.1 Théorème de convergence

Théorème 13 — Convergence des suites monotones : Soit (u_n) une suite numérique...

Si la suite (u_n) est **croissante**.

- Si la suite (u_n) est majorée par un réel M, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$.
- Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

Si la suite (u_n) est **décroissante**.

- Si la suite (u_n) est minorée par un réel m, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant m$.
- Si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} = -\infty$.

Démonstration 14 — Deuxième point uniquement : Supposons que la suite (u_n) ne soit pas majorée.

Alors, pour tout réel A, il existe un entier N tel que $u_N \geqslant A$. Or, puisque la suite est croissante, ceci implique que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant A$, c'est-à-dire $u_n \geqslant A$.

On a montré qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suites sont supérieurs à A, pour n'importe quel réel A. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

Attention à ne pas dire, dans le cas où la suite est croissante est majorée par L, que la limite vaut L !

Ce raisonnement peut être mis en défaut assez simplement : si une suite est majorée par L, alors elle l'est aussi par $L+1$, ce qui signifierait qu'elle tendrait aussi vers $L+1$? Le calcul de la limite demandera au moins une étape supplémentaire.

■ **Exemple 26 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \geqslant 1$.

- **Initialisation** : on a $u_0 = \frac{1}{2} \geqslant 0$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

  Ainsi, en multipliant pas -1, on a $0 \geqslant -u_n \geqslant -1$, puis, en ajoutant 1, on obtient $1 \geqslant 1 - u_n \geqslant 0$.

Les inégalités $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1-u_n \leqslant 1$ sont dans le même sens et concernent des réels positifs, on peut donc les multiplier entre elles.

Ainsi, on a $0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, cette suite est donc convergente. **ON NE CONCLUT PAS IMMÉDIATEMENT QUE LA LIMITE DE LA SUITE (u_n) EST 0 !** Notons plutôt ℓ sa limite.

Rappelons par ailleurs, que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Par ailleurs, les opérations sur les limites donnent $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_n^2) = \ell - \ell^2$.

En passant à la limite dans cette formule de récurrence, on a donc $\ell = \ell - \ell^2$, c'est-à-dire $\ell^2 = 0$ et donc $\ell = 0$.

MAINTENANT, nous pouvons conclure.

Conclusion : On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Il est important de montrer que la suite converge avant de passer à la limite.

Cela nous amène d'ailleurs au commentaire suivant.

Méthode 2 : Pour montrer qu'une suite croissante diverge vers $+\infty$ (ou qu'une suite décroissante diverge vers $-\infty$), on peut être amené à raisonner par l'absurde.

- On suppose que la suite est majorée (ou minorée) et que dans ce cas elle converge vers un réel ℓ.
- On détermine la valeur potentielle de cette limite et on aboutit à une contradiction.

■ **Exemple 27 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1 + u_n^2$.

Pour tout entier naturel n, on pose alors $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$. On a bien $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.
  La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors $2 \leqslant 1 + u_n^2 \leqslant 1 + u_{n+1}^2$ et donc $1 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
  $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

Nous avons donc montré que la suite (u_n) est croissante. Deux options s'offrent à nous :

- Soit elle est majorée par un réel M, et dans ce cas elle converge.
- Soit elle n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

Supposons que la suite (u_n) est majorée. Notons alors ℓ sa limite.

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1 + u_n^2$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Par ailleurs, les opérations sur les limites permettent d'établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + u_n^2) = 1 + \ell^2$.

En passant à la limite dans cette égalité, nous avons donc que $\ell = 1 + \ell^2$ et donc $\ell^2 - \ell + 1 = 0$.

Or, le discriminant du polynôme $x^2 - x + 1$ est -3 qui est strictement négatif. Ainsi l'équation $\ell^2 - \ell + 1 = 0$ n'admet aucune solution... ce qui est absurde. Nous sommes donc dans le deuxième cas mentionné plus haut.

Conclusion : On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

8.2 Algorithme de seuil

Lorsqu'une suite est strictement monotone, il est courant de rechercher la valeur à partir de laquelle elle dépassera un certain seuil. Il est possible de résoudre un tel problème à l'aide d'une résolution d'équation ou d'un algorithme.

■ **Exemple 28 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1 + u_n^2$.

On a montré que cette suite est strictement croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Soit v un réel. D'après la définition de la limite, il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, on a $u_n \geqslant v$. La suite (u_n) étant ici croissante, il suffit de trouver le premier rang n pour lequel $u_n \geqslant v$: les termes suivants seront forcément supérieurs à la valeur v.

Pseudo-algorithme

- On commence au rang $n = 0$ et on prend comme valeur initiale de la suite celle de u_0.
- Tant que la valeur actuelle u_n de la suite est inférieur à v on calcule la valeur suivante de la suite et on incrémente le rang.
- Si la valeur actuelle de u_n est supérieure ou égale à v, alors on s'arrête ici et on renvoie la valeur du rang n.

Variable d'entrée : v
$U = 1$
$N = 0$
Tant que $U < v$
  $U \leftarrow 1 + U * *2$
  $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Renvoyer N

La valeur de n est stockée dans la variable N et celle de u_n est stockée dans la variable U. A chaque étape, le terme suivant de la suite est calculé : N est augmenté de 1 et on applique la relation de récurrence de la suite (u_n) pour mettre à jour la valeur de U. Le programme renvoie alors la première valeur de n telle que u_n n'est pas strictement inférieur à v. On peut alors construire une fonction en Python qui prend en paramètres un réel v et qui renvoie cet entier n.

```python
def seuil(v):
    U = 1
    N = 0
    while U < v:
        N = N + 1          # passage au rang suivant
        U = 1 + U ** 2     # calcul du terme suivant
    return N
```

Dans notre cas, l'exécution de l'instruction **seuil(1000)** renvoie la valeur 5. Cela signifie que u_5 est le premier terme de la suite supérieur ou égal à 1000.

Cet algorithme peut varier sur certains aspects : on peut par exemple avoir une suite croissante, auquel cas on souhaitera le premier terme supérieur à une valeur donnée. On peut également considérer une suite ayant une limite finie. Cependant, la construction d'un tel algorithme est toujours la même.

9 Suites adjacentes

Définition 5 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si

- La suite (u_n) est croissante ;
- La suite (v_n) est décroissante ;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Méthode 3 : Pour montrer que deux suites sont adjacentes... Il suffit de montrer les 3 points de la définition... et donc de les connaître !

■ **Exemple 29 :** On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On commence par étudier les variations de ces deux suites.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

De plus, puisque $0 < n \leqslant n+1$, on a, par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$ et donc $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leqslant 0.$$

La suite (v_n) est donc décroissante.

Enfin, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n - v_n = 1 - \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

L'intérêt des suites adjacentes réside dans le théorème suivant.

Théorème 15 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.

Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers la même limite.

Démonstration 16 : Supposons que (u_n) est la suite croissante et (v_n) la suite décroissante (sinon, on échange les deux suites).

On considère la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Soit n un entier naturel. On a alors

$$w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - v_{n+1} - (u_n - v_n) = u_{n+1} - u_n - (v_{n+1} - v_n).$$

Or, puisque la suite (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Par ailleurs, puisque la suite (v_n) est décroissante, on a également $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et donc $-(v_{n+1} - v_n) \geqslant 0$.

- Finalement, on a $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$: la suite (w_n) est donc croissante.
- Cependant, par hypothèse, on a que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ces deux points impliquent donc que pour tout entier naturel n, on a donc $w_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \leqslant v_n$.

Or, la suite (u_n) est croissante : ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_0 \leqslant u_n$.
De même, la décroissance de la suite (v_n) nous assure que pour tout entier naturel n, on a $v_n \leqslant v_0$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0.$$

Ainsi,

- la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, elle converge donc vers une limite ℓ ;
- la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 elle converge donc vers une limite ℓ'.

Enfin, rappelons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. De plus, puisque les suites (u_n) et (v_n) convergent, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell - \ell'.$$

Finalement, on a $\ell - \ell' = 0$ et $\ell = \ell'$. Les suites (u_n) et (v_n) convergent et sont de même limite.

□

R On a eu besoin de u_0 et v_0 puisque la majoration/minoration d'une suite ne peut pas dépendre de n.

■ **Exemple 30 :** On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

- Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0.$$

  La suite (u_n) est donc croissante.
- Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

  En mettant le tout au même dénominateur, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant 0.$$

  La suite (v_n) est donc décroissante.
- Pour tout entier naturel n, $u_n - v_n = u_n - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En particulier, ces deux suites sont convergentes.

R Il s'avère que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$, mais avouez que ça ne saute pas aux yeux...