Convergence des suites

1 Limites et opérations

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n).

a. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$ **b.** $u_n = \dfrac{1}{n} - n^3$ **c.** $u_n = \mathrm{e}^{-n} + 3\ln(n)$

d. $u_n = (2n+1)\left(\dfrac{1}{n}+2\right)$ **e.** $u_n = \left(3+\dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2}-2\right)$ **f.** $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$

g. $u_n = n^2 - n$ **h.** $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)$ **i.** $u_n = \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

1. Écrire une fonction PYTHON `terme_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
   (b) En déduire une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n-4}{u_n+3}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x-4}{x+3}$ sur son domaine de définition.
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant -2$.
3. Écrire une fonction PYTHON `terme_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. On précisera son premier terme et sa raison.
   (b) En déduire une expression de v_n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Démontrer la propriété suivante : soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit (u_n) une suite convergente et (v_n) une suite divergente.
En procédant par l'absurde, montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est divergente.

2 Formes indéterminées

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{3n^3+2n-5}{2-4n^3}$

b. $u_n = \mathrm{e}^n - n^2$

c. $u_n = \dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}$

d. $u_n = \dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2}$

e. $u_n = \sqrt{n-3}-\sqrt{n+8}$

f. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}$

g. $u_n = \dfrac{2^n}{1+n}$

h. $u_n = (2n-4)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

i. $u_n = \dfrac{\ln(\sqrt{n})+1}{\ln(n^2)+\mathrm{e}^{-n}}$

j. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}$

k. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{n+\mathrm{e}^{-n}}$

l. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}}$

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel $n>1$, on pose $u_n = \sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-n-1}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

▶ Exercice 8 (Nouvelle-Calédonie 2023) – Voir le corrigé

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = n+3\times(-1)^n$

b. $u_n = n\left((-1)^{3n+1}-3\right)$

c. $u_n = \dfrac{n^2+2\times(-1)^n}{3n^2+2}$

d. $u_n = \dfrac{6n+2\times(-1)^n}{3n+4\times(-1)^{n+1}}$

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+n+2}{2}$.

1. Écrire une fonction PYTHON `terme_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Écrire une fonction PYTHON `terme_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{n}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4 Suites géométriques

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n puis déterminer, si elle existe, sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1.01$ et de premier terme $u_0 = 10^{-54}$.
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = -\sqrt{2}$ et de premier terme $u_n = 42$.
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = \pi - 3$ et de premier terme $u_0 = -1235$.

▶ Exercice 13 – Voir le corrigé

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

b. $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c. $u_n = -2 \times 4^n$

d. $u_n = 3 + 40 \times \left(-\dfrac{62}{63}\right)^n$

e. $u_n = 3 + 6 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^n$

f. $u_n = \dfrac{3^n}{4^n}$

g. $u_n = 2^n 6^{-n}$

h. $u_n = 3^n - 2^n$

i. $u_n = 2^n + 4^n + \dfrac{1}{2^n}$

j. $u_n = \dfrac{1 - 2^n}{1 - \dfrac{1}{3^n}}$

k. $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^k}$

l. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$

▶ Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 4$.
Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

▶ Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.
Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

▶ Exercice 16 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \dfrac{4u_{n+1} - u_n}{4}$.
Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

▶ Exercice 17 – Voir le corrigé

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

▶ Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{5}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_0 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5 Suites monotones

▶ Exercice 19 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 14$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.
3. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $\sqrt{\ell+2} = \ell$. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

▶ Exercice 20 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x-3}{3x-1}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[1;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
2. En déduire que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n-3}{3u_n-1} = f(u_n)$.

3. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 1$.
   (b) Étudier le sens de variations de (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Écrire une fonction PYTHON nommé `seuil` qui prend en entrée un nombre strictement positif `E` et qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1+E$.

▶ Exercice 21 – Voir le corrigé

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

▶ Exercice 22 – Voir le corrigé

Soit a un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]\sqrt{a};+\infty[$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. On considère la fonction f définie pour tout $x \in [\sqrt{a};+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$. Montrer que f est croissante sur $[\sqrt{a};+\infty[$.
2. Que vaut $f(\sqrt{a})$?
3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
5. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

► Exercice 23 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - 1$.

1. Montrer que (u_n) est majorée.
2. Supposons que (u_n) est majorée.
   (a) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
   (b) Déterminer alors la limite de (u_n). Que peut-on en conclure ?

► Exercice 24 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► Exercice 25 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire une fonction PYTHON `terme_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.
2. Étudier le sens de variations de la suite (u_n).
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5. Écrire une fonction PYTHON nommé `seuil` qui prend en entrée un nombre A et qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$.

► Exercice 26 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sum\limits_{k=0} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k, on a $k! \geqslant 2^{k-1}$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel de l'intervalle $]2;3]$.

6 Suites adjacentes

► Exercice 27 – Voir le corrigé

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Écrire une fonction PYTHON `terme_uv` qui prend en entrée un entier n et renvoie les valeurs de u_n et v_n.
2. Soit (w_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique.
   (b) Pour tout entier naturel n, déterminer l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) Déterminer les limite de la suite (w_n).
3. Étudier le sens de variations des suites (u_n) et (v_n).
4. Justifier que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers un même réel que l'on notera ℓ.
5. On considère la suite (t_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   Montrer que (t_n) est constante et déterminer la valeur de ℓ.

► Exercice 28 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

► Exercice 29 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Écrire une fonction PYTHON `terme_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.
2. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
3. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

► Exercice 30 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

1. Écrire une fonction PYTHON `terme_a` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de a_n.
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
3. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.
   En déduire que pour tout réel $x < 1$, on a $x \leqslant -\ln(1-x)$.
4. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $a_n \leqslant \ln(2) \leqslant b_n$.
   Que peut-on en déduire ?