

Calcul matriciel

1 Notion de matrice

1.1 Matrices

Définition 1 : Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients réels est la donnée de np nombres présentés sous la forme d'un tableau composé de n lignes et p colonnes.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

■ **Exemple 1 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$. On a $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Définition 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, i un entier compris entre 1 et n et j un entier compris entre 1 et p .

On appelle **coefficient** (i, j) de la matrice A le réel situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

Lorsque la matrice est désigné par une lettre majuscule, ses coefficients sont en général désignés par la lettre minuscule associée.

On écrira alors $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 2 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$. On a $a_{1,1} = 7$, $a_{2,1} = 1$ et $a_{2,3} = 9$.

■ **Exemple 3 :** On considère la matrice A de taille 2×3 dont le coefficient (i, j) vaut $a_{i,j} = ij^2$.

On a alors

- $a_{1,1} = 1 \times 1^2 = 1$
- $a_{1,2} = 1 \times 2^2 = 4$
- ...
- $a_{2,3} = 2 \times 3^2 = 18$

Finalement, on obtient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 18 \end{pmatrix}$

Définition 3 : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de même taille.

Les matrices A et B sont égales si et seulement si, pour tout entier i entre 1 et n et tout entier j entre 1 et p , on a $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Autrement dit, deux matrices sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux deux à deux.

1.2 Matrices particulières

Définition 4 : Quelques **matrices particulières**...

- Une matrice composée d'une seule ligne est appelée **matrice ligne**.
Pour p un entier naturel non nul, l'ensemble des matrices lignes ayant p colonnes est donc $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
- Une matrice composée d'une seule colonne est appelée **matrice colonne**.
Pour n un entier naturel non nul, l'ensemble des matrices colonnes ayant n lignes est donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

■ **Exemple 4 :** $\begin{pmatrix} 7 \\ 1,2 \\ -3,8 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de taille 3×1 .

$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de taille 1×4 .

Définition 5 : Soit n et p deux entiers naturels non nul, $i \in \llbracket 1;n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1;p \rrbracket$.

On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , qui vaut 1.

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 6 : Une **matrice carrée** est une matrice composée d'autant de lignes que de colonnes.

Pour n un entier naturel non nul, l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ (ou simplement de taille n) à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

■ **Exemple 5 :** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & \pi & 5 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 3.

Définition 7 : Soit n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est **diagonale** si : $\forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1,n \rrbracket, (i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$;
- On dit que A est **triangulaire supérieure** si : $\forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1,n \rrbracket, (i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$;
- On dit que A est **triangulaire inférieure** si : $\forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1,n \rrbracket, (i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$.

■ **Exemple 6** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors A est diagonale, B est triangulaire supérieure et C est triangulaire inférieure.

Définition 8 : Soit n et p deux entiers naturels non nuls

- On appelle **matrice nulle** de taille $n \times p$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ notée $0_{n,p}$ dont tous les coefficients valent 0. Si $n = p$, on notera plus simplement cette matrice 0_n .
- On appelle **matrice identité** de taille n la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée I_n dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres valent 0.

■ **Exemple 7** : On a $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Produit d'une matrice par un réel

Définition 9 : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice et λ un réel. La matrice λA est la matrice de taille $n \times p$ dont les coefficients sont égaux aux coefficients de A multipliés par λ . Autrement dit,

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \cdots & \lambda a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \cdots & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 8** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. On a alors $9A = \begin{pmatrix} 9 & 45 & -18 \\ 27 & -72 & 81 \end{pmatrix}$.

On utilisera bien une notation multiplicative quelles que soient les circonstances !

On écrira en effet $\frac{1}{2}A$ et jamais $\frac{A}{2}$.

2.2 Somme de matrices

Définition 10 : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de **même taille** $n \times p$.

La matrice $A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ dont le coefficient (i, j) vaut $a_{i,j} + b_{i,j}$.

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}$$

L'addition de deux matrices s'effectue donc terme à terme.

■ **Exemple 9** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

Propriété 1 : Soit A, B et C trois matrices de taille $n \times p$, λ et μ deux réels. On a

- $A + B = B + A$: l'addition de matrice est **commutative** ;
- $A + 0_{n,p} = A$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$: l'addition de matrices est **associative** ;
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Pour démontrer toutes ces propriétés, il suffit de revenir aux propriétés de calculs sur les réels.

Propriété 2 : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Il existe une unique matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ notée $-A$ telle que $A + (-A) = 0_{n,p}$.

Cette matrice est appelée « **opposée** de la matrice A » et on a $-A = (-a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

La propriété précédente nous permet alors de définir la différence de deux matrices.

Définition 11 : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de **même taille**.

La matrice $A - B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par $A - B = A + (-B)$. Ainsi,

$$A - B = (a_{i,j} - b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & \cdots & a_{1,p} - b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} - b_{n,1} & \cdots & a_{n,p} - b_{n,p} \end{pmatrix}$$

2.3 Lien avec les matrices $E_{i,j}$

Propriété 3 : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a alors

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j}.$$

Toute matrice peut donc être exprimée à l'aide des matrices $E_{i,j}$ dont nous avons parlé un peu plus tôt. C'est une propriété qui nous intéressera fortement un peu plus tard dans l'année...

2.4 Produit de matrices

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 12 : Soit $A = (a_1 \ \cdots \ a_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Le produit AB est la matrice de taille 1×1 qui vaut

$$AB = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_pb_p) = \left(\sum_{i=1}^p a_i b_i \right)$$

■ **Exemple 10 :** Soit $A = (1 \ 3 \ -5)$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a $AB = (1 \times 8 + 3 \times (-2) + (-5) \times 3) = (-13)$

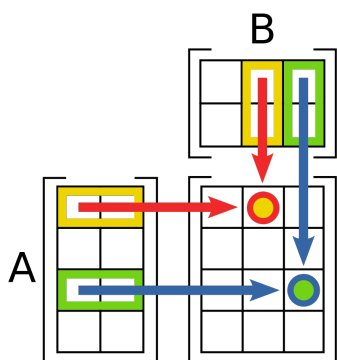
Il est important que le nombre de lignes de la première matrice soit égal au nombre de colonnes de la seconde !

Produit de deux matrices

Définition 13 : Soit A une matrice de taille $n \times p$ et B une matrice de taille $p \times q$.

Le produit AB est la matrice de taille $n \times q$ dont le coefficient (i, j) est égal au coefficient du produit de la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B .

$$AB = \left(\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \cdots + a_{1,p}b_{p,1} & \cdots & a_{1,1}b_{1,q} + a_{1,2}b_{2,q} + \cdots + a_{1,p}b_{p,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}b_{1,1} + a_{n,2}b_{2,1} + \cdots + a_{n,p}b_{p,1} & \cdots & a_{n,1}b_{1,q} + a_{n,2}b_{2,q} + \cdots + a_{n,p}b_{p,q} \end{pmatrix}$$



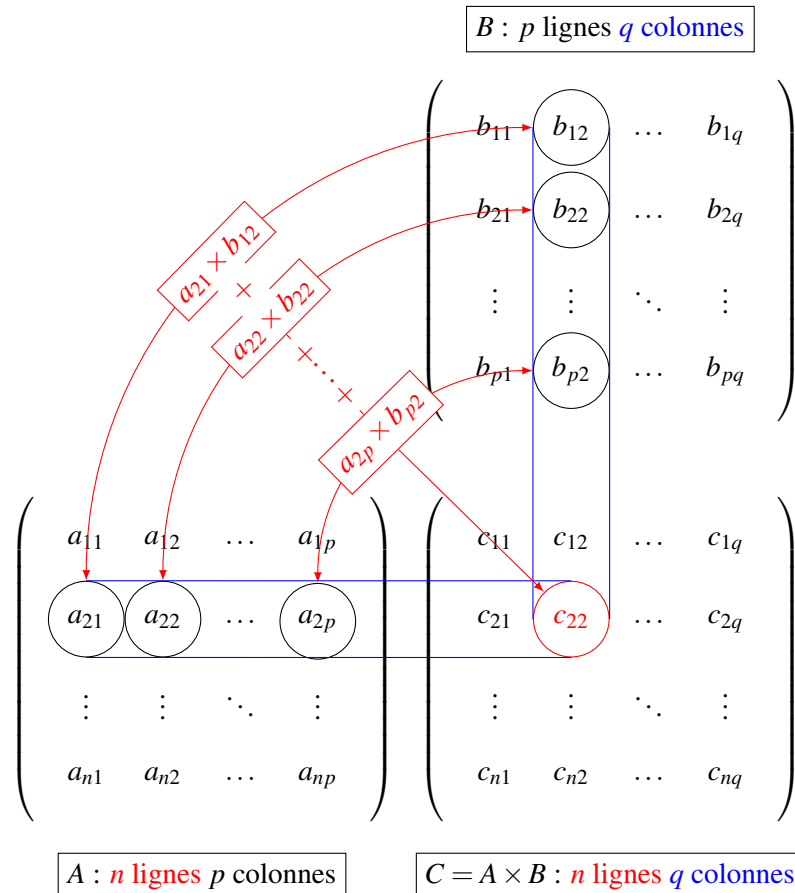
Important

Il n'est pas possible de multiplier n'importe quelles matrices entre elles. Deux matrices peuvent être multipliées si et seulement si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.

Illustration

Pour ne pas se perdre dans le calcul du produit de deux matrices, il peut être utile de se les représenter sous cette forme. La première matrice est à gauche et la deuxième matrice est au-dessus de la matrice produit à obtenir.

À retenir : (Matrice $N \times P$) \times (Matrice $P \times Q$) = Matrice $N \times Q$



■ **Exemple 11 :** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A est de taille 2×3 et B est de taille 3×4 .

Il est donc possible de calculer le produit AB : ce produit sera de taille 2×4 .

- Le coefficient $(1, 1)$ de AB est égal au coefficient du produit de la ligne 1 de A et de la colonne 1 de B .

$$(1 \ 2 \ 5) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \times 1 + 2 \times 7 + 5 \times 2) = (25).$$

Le coefficient $(1, 1)$ de AB vaut donc 25.

- Le coefficient $(2, 1)$ de AB vaut $3 \times 1 + 1 \times 7 + 2 \times 2 = 14$
- ...
- Le coefficient $(2, 3)$ de AB vaut $3 \times 6 + 1 \times 1 + 2 \times 0 = 19$

En faisant ainsi tous les calculs, on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 8 & -1 \\ 14 & 17 & 19 & 0 \end{pmatrix}$$

R Attention ! La multiplication des matrices n'est pas commutative, même lorsque les matrices sont de même taille.

■ **Exemple 12 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\bullet AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times (-1) & 1 \times 0 + 2 \times 3 \\ 0 \times 2 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 0 & 2 \times 1 + 0 \times 1 \\ -1 \times 1 + 3 \times 2 & -1 \times 2 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $AB \neq BA$. On dit que les matrices A et B ne commutent pas.

Propriétés de calcul

Propriété 4 : Soit m, n, p et q quatre entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a alors

- $0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$ et $A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$;
- $I_n \times A = A \times I_p = A$;

La seule difficulté ici se trouve dans les tailles des matrices.

Attention : ce n'est pas parce que l'on a deux matrices A et B qui vérifient $AB = 0$ que l'on a forcément $A = 0$ ou $B = 0$!

■ **Exemple 13 :** Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété 5 : Soit A et B deux matrices de taille $n \times p$, C et D deux matrices de taille $p \times q$. Soit λ et μ deux réels. On a

- $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$;
- $A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$.

■ **Exemple 14 :** On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times 3I_2 \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Attention, on rappelle que la multiplication de matrices n'est pas commutative ! Il faut, lorsque l'on factorise, que la matrice soit à chaque fois « du bon côté ».

Par exemple, on ne factorisera pas par $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans l'expression $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Propriété 6 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On a alors $(AB)C = A(BC)$.

Un cas particulier de multiplication matricielle est à retenir.

Propriété 7 : Soit n un entier naturel non nul. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ des réels. alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices diagonales de même taille est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients des deux matrices du produit.

■ **Exemple 15 :** On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$.

2.5 Transposée d'une matrice

Définition 14 : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

La transposée de A , notée tA est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par

$${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

C'est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A .

■ **Exemple 16 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. On a alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Propriété 8 : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel. On a alors

$${}^t({}^tA) = A \quad ; \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA \quad ; \quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB.$$

Soit $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On a alors :

$${}^t(CD) = {}^tD {}^tC.$$

Il faut bien faire attention à l'ordre des matrices dans cette dernière propriété. En effet, la matrice tD est de taille $q \times p$ et la matrice tC est de taille $p \times n$. Le produit ${}^tD {}^tC$ est donc bien défini et est de taille $q \times n$.

Comme pour le reste des propriétés, celles-ci se démontrent (laborieusement) en revenant aux définitions des diverses opérations en jeu ici.

Définition 15 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

- On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$.
- On dit que A est anti-symétrique si ${}^tA = -A$.

■ **Exemple 17** : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est anti-symétrique.

Remarque : les coefficients diagonaux d'une matrice anti-symétrique sont toujours nuls.

3 Puissance d'une matrice carrée

3.1 Puissance d'une matrice

Définition 16 : Soit A une matrice carrée de taille n et k un entier naturel non nul.

On définit par A^k la matrice égale à $A \times A \times \dots \times A$ où la matrice A apparaît k fois.

Par ailleurs, on conviendra que $A^0 = I_n$.

Propriété 9 : Soit A une matrice carrée, k et ℓ deux entiers naturels. On a $A^k \times A^\ell = A^{k+\ell}$ et $(A^k)^\ell = A^{k\ell}$.

En revanche, si A et B sont deux matrices carrées de même taille et k un entier naturel, on n'a pas toujours $(AB)^k = A^k B^k$.

■ **Exemple 18** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons les premières puissances de la matrice A . On a alors

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

Pour tout entier naturel n , on note alors $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

- **Initialisation** : On a $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + n \times 0 & 1 \times 1 + 1 \times n \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et \mathcal{P} est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on a montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De nouveau, un cas important est à retenir pour les puissances de matrices...

Propriété 10 : Soit k un entier naturel, n un entier naturel non nul, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. On a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration 1 : La démonstration se fait par récurrence en utilisant la propriété sur le produit de deux matrices diagonales. \square

■ **Exemple 19 :** On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}.$

■ **Exemple 20 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Des calculs directs montrent que $PDQ = A$ et que $QP = PQ = I_3$ (nous aborderons ce type de matrices un peu plus tard dans ce chapitre...).

On a alors $A^2 = (PDQ)^2 = PD \underbrace{QP}_{I_3} DQ = PD^2Q$, puis $A^3 = A^2 \times A = PD^2 \underbrace{QP}_{I_3} DQ = PD^3Q \dots$

Pour tout entier naturel n , posons $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nQ$ ».

- **Initialisation :** On a $A^0 = I_3$ et $PD^0Q = P \times I_3 \times Q = PQ = I_3$. Ainsi, $A^0 = PD^0Q$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = \underbrace{PD^nQ}_{\text{H.R.}} PDQ = PD^n \underbrace{QP}_{I_3} DQ = PD^{n+1}Q.$$

- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie et \mathcal{P} est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on a montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nQ.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned} A^n = PD^nQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Polynômes de matrices

Définition 17 : Soit n un entier naturel, a_0, \dots, a_n des réels et $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ une fonction polynomiale.

Pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on notera alors $P(A)$ la matrice définie par

$$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k M^k.$$

On dit par ailleurs que P est un polynôme **annulateur** de A si $P(A) = 0_p$.

■ **Exemple 21 :** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le polynôme $P : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est un polynôme annulateur de M . En effet,

$$\begin{aligned} M^2 - 3M + 2I_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0_3. \end{aligned}$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Considérons alors le polynôme $A : x \mapsto x^n$ et déterminons le reste de la division euclidienne de A par P . Puisque P est de degré 2, ce reste est donc de degré au plus 1.

Posons donc a et b les réels et Q le polynôme tels que, pour tout réel x , on a $x^n = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$.

En particulier, en remplaçant x par les racines de P (c'est-à-dire 1 et 2) dans cette relation, on obtient alors

$$\begin{cases} 1 &= a + b \\ 2^n &= 2a + b \end{cases}$$

Résolvons alors ce système.

$$\begin{cases} 1 &= a + b \\ 2^n &= 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= a + b \\ 2^n - 1 &= a \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (2^n - 1) &= b \\ 2^n - 1 &= a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2^n &= b \\ 2^n - 1 &= a \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel x , on a

$$x^n = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + (2^n - 1)x + 2 - 2^n.$$

Il en vient que

$$M^n = \underbrace{(M^2 - 3M + 2I_3)}_{=0_3} \times Q(M) + (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_3 = (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_3 = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

4 Matrices inversibles

4.1 Inverse d'une matrice

Définition 18 : Soit A une matrice carrée de taille n . On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée B de taille n telle que $AB = BA = I_n$.

Si une telle matrice existe, elle est unique et est appelée inverse de A . On la note alors A^{-1} .

L'ensemble des matrices à coefficients réels inversibles de taille n est noté $GL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration 2 : Supposons qu'il existe deux matrices B et B' telles que $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$.

Alors $B' = I_n B' = (BA)B' = B(AB') = BI_n = B$. On a donc $B' = B$. \square

■ **Exemple 22 :** Soit n un entier naturel non nul. La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Propriété 11 : Soit A et B deux matrices carrées de taille n . Alors $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.

Dans les faits, pour montrer qu'une matrice B est l'inverse d'une matrice A , il suffit de vérifier que $AB = I_n$.

■ **Exemple 23 :** L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 2,5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En effet,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2,5 + 4 \times (-1) & 2 \times (-2) + 4 \times 1 \\ 2 \times 2,5 + 5 \times (-1) & 2 \times (-2) + 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

4.2 Propriétés

Propriété 12 : Soit A une matrice inversible de taille n .

Alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration 3 : Il suffit de revenir à la définition.

Si A est inversible alors $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. On en conclut que A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$. \square

Propriété 13 : Soit A et B deux matrices inversibles de taille n .

Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration 4 : On a en effet $A \underbrace{BB^{-1}}_{I_n} A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et $B^{-1} \underbrace{A^{-1}A}_{I_n} B = B^{-1}B = I_n$.

Ainsi, AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. \square

Propriété 14 : Soit A une matrice inversible.

Alors pour tout entier naturel k , A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Démonstration 5 : La démonstration se fait par récurrence sur l'entier k . \square

Propriété 15 : Soit A une matrice inversible de taille n . Alors ${}^t A$ est inversible et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration 6 : En effet, on a ${}^t A {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^t I_n = I_n$ et ${}^t(A^{-1}) {}^t A = {}^t(AA^{-1}) = {}^t I_n = I_n$.

Ainsi, ${}^t A$ est inversible et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. \square

Propriété 16 : Soit A , B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si A est inversible, alors $AB = C \Leftrightarrow B = A^{-1}C$;
- Si B est inversible, alors $AB = C \Leftrightarrow A = CB^{-1}$.

Démonstration 7 : La première équivalence s'obtient en multipliant à gauche par A^{-1} . La deuxième s'obtient en multipliant à droite par B^{-1} . \square

La multiplication de matrices n'étant pas commutative, il faut se montrer prudent lors de ce type de calculs, et ne pas se tromper de côté lors des diverses multiplications.

4.3 Cas particuliers d'inversibilité

Matrices diagonales

Propriété 17 : Soit n un entier naturel non nul, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. La matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est inversible si et seulement si tous ces coefficients sont non nuls. De plus,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration 8 : Si tous les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont non nuls, on peut alors calculer $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$. On a alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \times \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \times \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \times \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = I_n$$

Sinon, posons $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\lambda_i = 0$. Alors la i -ième ligne de notre matrice diagonale est nulle. Si on multiplie cette matrice avec n'importe quelle matrice carrée de taille n , le produit aura également sa i -ième ligne nulle, et ne peut donc être égal à l'identité. Une telle matrice ne peut donc pas être inversible. \square

■ **Exemple 24 :** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

■ **Exemple 25 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $PQ = I_3$. Ainsi, P et Q sont inversibles, et on a $P^{-1} = Q$ et $Q^{-1} = P$. Par ailleurs, la matrice D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

Ainsi, D est inversible et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En outre, on peut facilement montrer que $A = PDQ$. A est donc inversible et

$$A^{-1} = (PDQ)^{-1} = Q^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}Q$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Utilisation d'un polynôme annulateur

La donnée d'un polynôme annulateur d'une matrice peut nous donner des informations sur son inversibilité.

■ **Exemple 26 :** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dans un exemple précédent, on a vu que le polynôme $P : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est un polynôme annulateur de M .

On a donc $M^2 - 3M + 2I_3 = 0_3$.

Ainsi, $M^2 - 3M = -2I_3$. Il en vient que $-\frac{1}{2}(M^2 - 3M) = I_3$ et donc que $-\frac{1}{2}(M - 3I_3) \times M = I_3$.

Ainsi, la matrice M est inversible et

$$M^{-1} = -\frac{1}{2}(M - 3I_3) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 27 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$.

Ainsi, $A^2 = 3A$ et donc $A^2 - 3A = 0_3$. Ainsi, $A(A - 3I_3) = 0_3$.

Supposons que A est inversible.

En multipliant l'égalité précédente par A^{-1} à gauche, on aurait alors $A - 3I_3 = 0_3$... ce qui n'est pas le cas.

Ainsi, la matrice A n'est pas inversible.

Cas des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Propriété 18 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration 9 : On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ac + ac \\ bd - bd & -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$$

- Si $ad - bc \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2$, et on obtient le résultat voulu
- Si $ad - bc = 0$, supposons que A est inversible. Notons A^{-1} son inverse et B la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$B = I_2 B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1} \times (ad - bc)I_2 = A^{-1} \times 0_{2,2} = 0_{2,2}$$

Ainsi, $B = 0_{2,2}$ et tous ses coefficients sont nuls. On a alors $a = b = c = d = 0$. C'est absurde, car on a supposé la matrice A inversible. La matrice A n'est donc pas inversible. □

■ **Exemple 28 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. A est inversible et son inverse est $A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5 Matrices et systèmes linéaires

5.1 Traduction matricielle d'un système

Considérons le système linéaire de n équations à p inconnues suivant

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

où les $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et les $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des nombres réels, et x_1, x_2, \dots, x_n sont des inconnues.

Notons alors $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients ;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice des inconnues ;

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ la matrice colonne du second membre.

Le système linéaire (S) se traduit alors matriciellement par l'équation $AX = Y$.

5.2 Lien avec l'inversibilité

Propriété 19 : Soit A une matrice carrée de taille n .

A est inversible si et seulement si, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution.

Dans ce cas, l'unique solution de l'équation $AX = Y$ est alors $X = A^{-1}Y$.

Démonstration 10 : On raisonne par double implication.

- Supposons que A est inversible. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a alors

$$AX = Y \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y.$$

- Réciproquement, supposons que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère alors la matrice colonne Y_i dont tous les coefficients valent 0 sauf le i -ième qui vaut 1 (il s'agit en réalité de la i -ième colonne de la matrice identité). Notons alors X_i l'unique solution de l'équation $AX = Y_i$ et introduisons B la matrice carrée formée à l'aide des X_i mis côte à côte, dans l'ordre. On a alors $AB = I_n$. La matrice A est donc inversible.

Ainsi, l'inversibilité d'une matrice est équivalente à l'existence et l'unicité d'une solution à tout système associée à cette matrice... lequel revient à l'existence de pivots tous non nuls. On en déduit la propriété suivante.

Propriété 20 : Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

■ **Exemple 29 :** Soit λ un réel. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{0; 1\}$.

Par ailleurs, la propriété précédente nous apporte également un moyen « rapide » de déceler une matrice non inversible en regardant les liens entre ses colonnes.

Propriété 21 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons C_1, C_2, \dots, C_n ses colonnes.

S'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k C_k = 0_{n,1}$, alors la matrice A n'est pas inversible.

Démonstration 11 : Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les réels tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k C_k = 0_{n,1}$.

On a alors $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{n,1}$. Or, on a également $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{n,1}$.

L'équation $AX = 0_{n,1}$ admet donc deux solutions distinctes (au moins un des λ_i est non nul), la matrice A n'est donc pas inversible. \square

■ **Exemple 30 :** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

En effet, si l'on note C_1, C_2 et C_3 ses colonnes, on a $C_1 + C_2 - C_3 = 0_{3,1}$.

La même propriété peut être énoncée en faisant intervenir les lignes de la matrice.

Propriété 22 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons L_1, L_2, \dots, L_n ses colonnes.

S'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k L_k = 0_{1,n}$, alors la matrice A n'est pas inversible.

■ **Exemple 31 :** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ -4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

En effet, si l'on note L_1, L_2 et L_3 ses lignes, on a $2L_2 + L_3 = 0_{1,3}$.

Ces deux propositions sont en réalité des équivalences, mais nous sommes bien loin d'avoir les outils à disposition pour l'établir.

Deux cas particuliers facilement identifiables sont toutefois à retenir.

Propriété 23 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si l'une des colonnes ou l'une des lignes de A est composée uniquement de 0, alors la matrice A n'est pas inversible.

■ **Exemple 32 :** Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles.

5.3 Calcul d'inverse

Reste désormais à traiter tous les autres cas moins évidents...



Méthode 1 : Pour étudier l'inversibilité d'une matrice A et déterminer son inverse...

- On regarde si elle est clairement non inversible (ligne ou colonne de 0, ligne ou colonne combinaison linéaire des autres, matrices triangulaires avec des coefficients diagonaux nuls...)
- sinon, on résout, pour toute matrice colonne Y , le système $AX = Y$ où X est l'inconnue.

■ **Exemple 33 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned}
 AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & - x_3 & = & y_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & & y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & & y_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & - x_3 & = & y_1 \\ x_2 + 3x_3 & = & -2y_1 + y_2 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ x_2 + 2x_3 & = & -y_1 + y_3 & (L_3 \leftarrow L_1 - L_3) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & - x_3 & = & y_1 \\ x_2 + 3x_3 & = & -2y_1 + y_2 \\ -x_3 & = & y_1 - y_2 + y_3 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

On aboutit à un système triangulaire dont les pivots (1, 1 et -1) sont non nuls. On peut d'ores et déjà affirmer que la matrice A est inversible. Continuons pour déterminer l'inverse de la matrice A .

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & y_2 - y_3 & (L_1 \leftarrow L_1 - L_3) \\ x_2 & = & y_1 - 2y_2 + 3y_3 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3) \\ -x_3 & = & y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & y_2 - y_3 \\ x_2 & = & y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ x_3 & = & -y_1 + y_2 - y_3 & (L_3 \leftarrow -L_3) \end{cases}$$

On peut alors traduire matriciellement ce nouveau système, pour obtenir

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } AX = Y \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} Y, \text{ on a donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$



Méthode 2 : En général, nous rédigerons autrement le calcul de l'inverse (éventuel) d'une matrice.

- On écrit côte à côte la matrice A à gauche et la matrice I_n à droite ;
- on applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice A jusqu'à éventuellement obtenir la matrice identité à sa place ;
- on applique en même temps les mêmes opérations sur la matrice de droite ;
- si l'on parvient à gauche jusqu'à la matrice I_n , alors A est inversible, et son inverse est la matrice de droite ;
- si l'on aboutit à des pivots nuls, alors la matrice A n'est pas inversible.

■ **Exemple 34 :** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminons si A est inversible et son éventuelle inverse. On a alors

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -6 & 3 \end{array} \right) (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$$

On obtient à gauche une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux (c'est-à-dire les pivots du système) sont tous nuls. La matrice A est donc inversible. Continuons nos calculs jusqu'à obtenir l'identité à gauche. On a donc

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -6 & 3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 0 & -5 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -6 & 3 \end{array} \right) & (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) & (L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1) \\ (L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3) \end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

■ **Exemple 35** : On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Déterminons si B est inversible et son éventuelle inverse. On a alors

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)
\end{aligned}$$

On aboutit à un système triangulaire ayant un pivot nul. La matrice B n'est donc pas inversible.

Remarque : On aurait aussi pu remarquer que $C_1 + C_3 - 2C_2 = 0_{3,1} \dots$