

Matrices

Notion de matrices

► Exercice 1 – Voir le corrigé

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -3 \\ 2 & 6 & -8 & 0 \\ 7 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Quelle est la dimension de la matrice A ?
2. Que valent $a_{1,2}$, $a_{3,3}$ et $a_{2,4}$?

► Exercice 2 – Voir le corrigé

Écrire les matrices suivantes sous la forme d'un tableau de nombres.

$$\begin{aligned} \bullet A &= (i+j)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} & \bullet B &= (\max(i,j))_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4} \\ \bullet C &= \left(\frac{ij}{i+j} \right)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2} & \bullet D &= (i+1)_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2} \end{aligned}$$

► Exercice 3 – Voir le corrigé

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ une matrice carrée de dimension n . On appelle trace de A la somme des coefficients diagonaux de la matrice A . On a donc $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. Déterminer la trace des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = I_n \quad C = (i+j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \quad D = (ij)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

Opérations sur les matrices

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = (3 \quad -2 \quad 1 \quad 7)$ et $D = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Parmi les produits suivants, déterminer ceux qui ont un sens et calculer ces produits.

$$\begin{array}{ccccc} AB & AC & BC & CA & CB \\ AD & CD & DC & BD & DB \end{array}$$

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Déterminer les valeurs des réels a , b , c et d pour que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $A = {}^tMM$ et $B = M^tM$.

1. De quelles tailles sont les matrices A et B ?
2. Montrer que les matrices A et B sont symétriques.

► **Exercice 7 – Voir le corrigé**

Soit A une matrice. En raisonnant par analyse-synthèse, montrer que A s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

► **Exercice 8 – Voir le corrigé**

On dit qu'une matrice carrée est stochastique si ses coefficients sont tous positifs et si la somme des coefficients pour chaque ligne vaut 1.

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques de même taille est une matrice stochastique.

Puissances de matrices

► **Exercice 9 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2A$ et en déduire A^n pour tout entier naturel non nul n .

► **Exercice 10 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_2$.

1. Calculer B puis B^2 .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = I_2 + nB$.

► **Exercice 11 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

► **Exercice 12 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$.

► **Exercice 13 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^{2025} .

► **Exercice 14 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites numériques (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel n , on a $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$. On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
2. Pour tout entier naturel n , on pose $s_n = a_n + b_n$ et $d_n = a_n - b_n$. Déterminer la nature puis les termes généraux des suites (s_n) et (d_n) .
3. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n .

► **Exercice 15 – Voir le corrigé**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Calculer A^2 et A^3 et vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.
 (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

et vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

- (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.
 (b) En déduire une expression de a_n pour tout entier naturel non nul n .
 (c) En déduire une expression de b_n pour tout entier naturel non nul n .
 (d) En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel non nul n .

► **Exercice 16 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- Montrer que le polynôme $P : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ est annulateur de A .
- Pour tout entier naturel n , déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par P .
- En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n .

Matrices inversibles

► **Exercice 17 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 .
- Vérifier que $A^2 + A = 2I_3$.
- En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

► **Exercice 18 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et A^3 .
- Calculer $A^3 - A^2 - 2A$.
- En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

► **Exercice 19 – Voir le corrigé**

Soit n un entier naturel et M une matrice de dimension n .

On dit que M est nilpotente de rang p si $M^p = 0_n$ et $M^{p-1} \neq 0_n$.

- Soit B une matrice nilpotente de rang p
 - Calculer le produit $(I_3 - B) \sum_{k=0}^{p-1} B^k$.
 - En déduire que $I_3 - B$ est inversible et déterminer son inverse.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est nilpotente puis déterminer l'inverse de $I_3 - A$.

► **Exercice 20 – Voir le corrigé**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n .

► **Exercice 21 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

► **Exercice 22 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Sans calcul, justifier que la matrice A n'est pas inversible.
2. Calculer A^3 .
3. Pour tout réel t , on pose $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$
 - (a) Montrer que pour tous réels t et t' , on a $E(t)E(t') = E(t+t')$.
 - (b) En déduire que pour tout réel t , la matrice $E(t)$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de I_3, A, A^2 et t .

► **Exercice 23 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et donner son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Déterminer une expression de A^n pour tout entier naturel n .
4. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\Delta = P^{-1}MP$. Établir l'équivalence suivante : $M^2 = A \Leftrightarrow \Delta^2 = D$.
5. Soit Δ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$. Montrer que Δ et D commutent et en déduire que Δ est une matrice diagonale.
6. Déterminer l'ensemble des matrices $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Delta^2 = D$.
7. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Matrices et systèmes

► **Exercice 24 – Voir le corrigé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit AB .
2. Traduire sous forme matricielle puis résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + z = 1 \\ x + y = 3 \\ y - z = 6 \end{cases}$$

► **Exercice 25 – Voir le corrigé**

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elles sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

► **Exercice 26 – Voir le corrigé**

Soit a , b et c trois réels et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On souhaite déterminer les valeurs des réels a tels que $f(-1) = 15$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 6$.

1. Justifier que ce problème revient à résoudre le système matriciel $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. En déduire les valeurs des réels a , b et c solutions du problème.

► **Exercice 27 – Voir le corrigé**

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On effectue les commandes suivantes en Python.

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as al
3
4 M = ...
5 A = al.matrix_power(M,3) - np.dot(M,M) - 8 * M - 6 * np.eye(3)
6 print(A)
7 >>> [[0.  0.  0.]
8      [0.  0.  0.]
9      [0.  0.  0.]
```

(a) Compléter la ligne 4 qui permet de définir la matrice M et de la stocker dans une variable M .

(b) Donner un polynôme annulateur de M .

2. En déduire que M est inversible et déterminer son inverse.

3. On cherche à déterminer trois entiers tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$ et $C(2; 5)$.

(a) Traduire matriciellement le problème.

(b) Déterminer les valeurs des entiers a , b et c .

► **Exercice 28 – Voir le corrigé**

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que P est inversible et calculer P^{-1} .

2. On note $B = PAP^{-1}$. Calculer B puis B^n pour tout entier naturel n .

3. En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n .

4. Justifier que A est inversible et calculer A^{-1} .

► **Exercice 29 – Voir le corrigé**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D et en déduire D^n pour tout entier naturel n .
3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

4. Compléter la fonction suivante, écrit en Python, qui prend en entrée un entier n et renvoie la liste des valeurs $[u_0, u_1, \dots, u_n]$.

```

1 def liste_termes_u(n):
2     if n == 0:
3         return [2]
4     elif n == 1:
5         return ...
6     else :
7         u = [0] * (n+1)
8         u[0] = ...
9         u[1] = ...
10        u[2] = ...
11        for i in range(..., ...):
12            u[i+3] = ...
13        return u

```

5. Pour tout entier naturel n , on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

- (a) Vérifier que pour tout entier naturel n , on a $X_{n+1} = AX_n$.
- (b) Exprimer, pour tout entier naturel n , la matrice X_n en fonction de A , n et X_0 .
- (c) Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .