

# Limites de fonction

## 1 Limite en un point

### 1.1 Limite finie en un point

**Définition 1 :** Soit  $I$  un intervalle bornée de  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0$  un réel ou une extrémité de  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  (sauf éventuellement en  $x_0$ ). Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  (ou que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $x_0$ ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert centré en  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $x$  lorsque  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$ .

Si elle existe, une telle limite est unique. On note alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs supérieures (ou que  $f$  admet  $\ell$  comme limite à droite en  $x_0$ ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, (x \in ]x_0; x_0 + \delta] \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

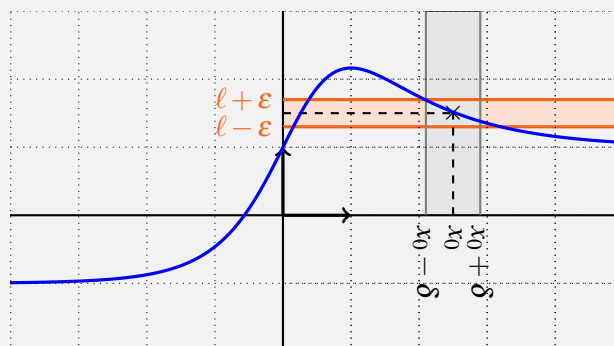
Si elle existe, une telle limite est unique. On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$  ou  $\lim_{x > x_0} f(x) = \ell$ .

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs inférieures (ou que  $f$  admet  $\ell$  comme limite à gauche en  $x_0$ ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0[ \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Si elle existe, une telle limite est unique. On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$  ou  $\lim_{x < x_0} f(x) = \ell$ .

■ **Exemple 1 :** On considère une fonction  $f$  dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



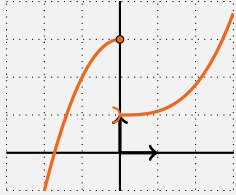
Peu importe la valeur de  $\varepsilon$ , on peut trouver un réel  $\delta$  tel que, si  $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ , alors  $f(x) \in [l - \varepsilon; l + \varepsilon]$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

**Remarque :** Si la fonction  $f$  admet une limite en  $x_0$  et est définie en  $x_0$ , on a alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . On dira alors que la fonction  $f$  est continue en  $x_0$ ... Nous en parlerons davantage dans un prochain chapitre.

■ **Exemple 2 :** On a  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$ .

■ **Exemple 3 :** On considère la fonction  $f$  dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



D'après le graphique, il semble que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ .

## 1.2 Limite infinie en un point

**Définition 2 :** Soit  $I$  un intervalle bornée de  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0$  un réel ou une extrémité de  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  (sauf éventuellement en  $x_0$ ).

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A).$$

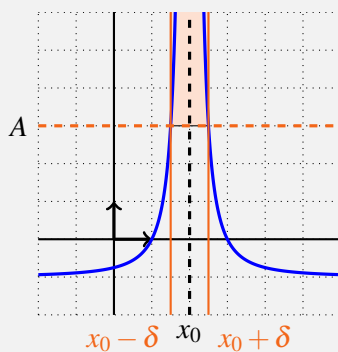
Autrement dit, l'intervalle  $[A; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$ . On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq A).$$

Autrement dit, l'intervalle  $] -\infty; A]$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$ . On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

■ **Exemple 4 :** On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction  $f$ .



Pour n'importe quelle valeur du réel  $A$ , on peut trouver un intervalle centré sur  $a$  tel que toute valeur de  $f(x)$  est supérieur à  $A$  pour n'importe quel  $x$  pris dans cet intervalle.

Ce raisonnement vaut peu importe la valeur du réel  $A$  : on a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

Tout comme précédemment, le comportement de la fonction  $f$  peut varier selon si l'on approche du réel  $a$  par valeurs inférieures ou supérieures. On peut alors définir la limite à droite ou la limite à gauche.

■ **Exemple 5 :** On considère la fonction  $f$  dont on a tracé ci-dessous la courbe dans un repère.



Il semblerait que, lorsque l'on s'approche de 1 par valeurs supérieures, la limite soit  $+\infty$ , ce que l'on notera  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ .

En revanche, lorsque l'on s'approche de 1 par valeurs inférieures, la limite semble être  $-\infty$ , ce que l'on note  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ .

**Définition 3 :** Lorsque la limite d'une fonction  $f$  est infinie en un réel  $x_0$  (à droite ou à gauche), on dit que la droite d'équation  $x = x_0$  est une asymptote verticale à la courbe représentative de  $f$  au voisinage de  $x_0$ .

■ **Exemple 6 :** Dans l'exemple précédent, la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote à la courbe de  $f$ .

## 2 Limite en l'infini

### 2.1 Limite infinie en l'infini

**Définition 4 :** Soit  $a$  un réel et  $I = ]a; +\infty[$ . On considère une fonction  $f$  définie sur  $I$ .

- On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  (ou que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ) lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, (x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A).$$

Autrement dit, les valeurs de  $f(x)$  seront supérieures à n'importe quelle valeur donnée pour tout  $x$  suffisamment grand.

- On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$  lorsque

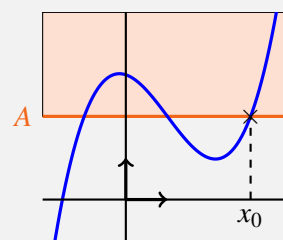
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, (x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A).$$

Autrement dit, les valeurs de  $f(x)$  seront inférieures à n'importe quelle valeur donnée pour tout  $x$  suffisamment grand.

■ **Exemple 7 :** On représente ici la courbe d'une fonction  $f$  dans un repère.

Pour n'importe quel réel  $A$ , aussi grand que l'on veut, on peut trouver un  $x_0$  à partir duquel la courbe est toujours au-dessus de la droite d'équation  $y = A$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .



**Définition 5 :** Soit  $a$  un réel et  $I = ]-\infty; a[$ . On considère une fonction  $f$  définie sur  $I$ .

- On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $-\infty$  (ou que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ ) lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, (x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A).$$

Autrement dit, les valeurs de  $f(x)$  seront supérieures à n'importe quelle valeur donnée pour tout  $x$  suffisamment grand dans les négatifs.

- On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $-\infty$  (ou que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ ) lorsque :

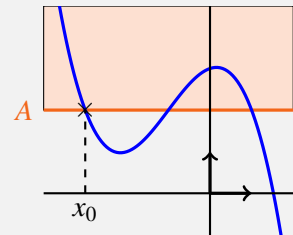
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, (x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A).$$

Autrement dit, les valeurs de  $f(x)$  seront inférieures à n'importe quelle valeur donnée pour tout  $x$  suffisamment grand dans les négatifs.

■ **Exemple 8** : On représente ici une fonction  $f$  dans un repère.

Pour n'importe quel  $A$ , aussi grand que l'on veut, on peut trouver un  $x_0$  en-dessous duquel la courbe est toujours au-dessus de la droite d'équation  $y = A$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .



## 2.2 Limite finie en l'infini

**Définition 6** : Soit  $a$  un réel et  $I = [a; +\infty[$ . On considère une fonction  $f$  définie sur  $I$ .

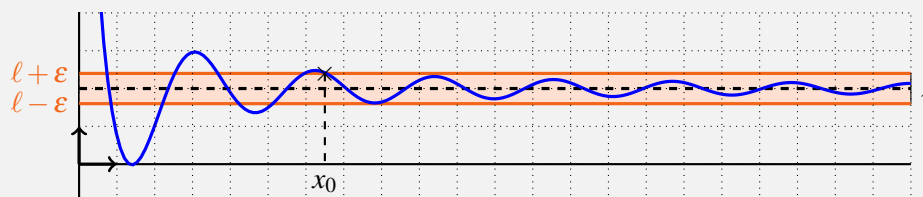
On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $+\infty$  (ou que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, (x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Autrement dit,  $f(x)$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  pour tout réel  $x$  suffisamment grand.

Si une telle limite existe, elle est unique. On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

■ **Exemple 9** : Une fonction  $f$  est représentée ci-dessous. Pour n'importe quel  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un réel  $x_0$  tel que, pour tout réel  $x$  supérieur à  $x_0$ , on a toujours  $f(x) \in ]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$ . On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .



La définition précédente se peut alors être étendue au cas où  $x$  tend vers  $-\infty$ .

**Définition 7** : Soit  $a$  un réel et  $I = ]-\infty; a]$ . On considère une fonction  $f$  définie sur  $I$ .

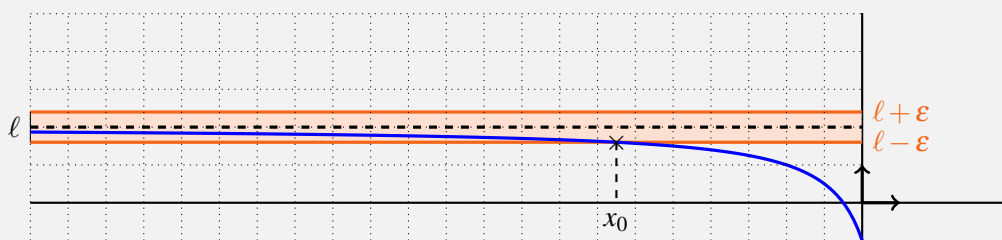
On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $-\infty$  (ou que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, (x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Autrement dit,  $f(x)$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  pour tout réel  $x$  suffisamment grand dans les négatifs.

Si une telle limite existe, elle est unique. On note alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ .

■ **Exemple 10** : Une fonction  $f$  est représentée ci-dessous. Pour n'importe quel  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un réel  $x_0$  tel que, pour tout réel  $x$  inférieur à  $x_0$ , on a toujours  $f(x) \in ]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$ . On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .



**Définition 8** : On se place dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé.

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , on dit que la droite d'équation  $y = \ell$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$
- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ , on dit que la droite d'équation  $y = \ell$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $-\infty$

■ **Exemple 11** : Dans l'exemple 8, la droite d'équation  $y = 2$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ . Dans l'exemple 9, la droite d'équation  $y = 2$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $-\infty$ .

Comme dans le cas des suites, il est parfois utile de préciser le comportement d'une fonction qui admet une limite finie en  $+\infty$ .

**Définition 9** : Soit  $a$  un réel et  $I = [a; +\infty[$ . On considère une fonction  $f$  définie sur  $I$ .

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  par valeurs supérieures lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, (x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \in [\ell, \ell + \varepsilon]).$$

Autrement dit,  $f(x)$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  pour tout réel  $x$  suffisamment grand, tout en restant supérieur à  $\ell$ .

On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^+$ .

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  par valeurs inférieures lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, (x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell]).$$

Autrement dit,  $f(x)$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  pour tout réel  $x$  suffisamment grand, tout en restant inférieur à  $\ell$ .

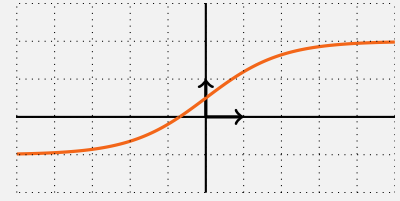
On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^-$ .

Attention, ce n'est pas parce que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  qu'on a forcément  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^+$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^-$ . Les valeurs de  $f(x)$  peuvent osciller autour de  $\ell$ , lui étant parfois supérieures, parfois inférieures.

Les mêmes définitions s'étendent naturellement pour les limites en  $-\infty$ .

■ **Exemple 12 :** On a représenté la courbe d'une fonction  $f$  dans un repère.

Il semblerait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2^-$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-1)^+$   
 La droite d'équation  $y = 2$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ .  
 La droite d'équation  $y = -1$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $-\infty$ .



### 2.3 Limites usuelles

**Propriété 1 :** On a les limites usuelles suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Soit  $\alpha$  un réel strictement positif

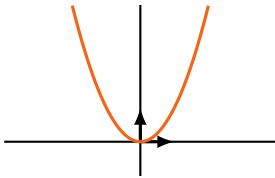
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

Si  $n$  est un entier naturel pair :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$ .

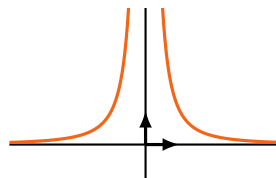
Si  $n$  est un entier naturel impair :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0^-$ .

Il est important de visualiser les courbes représentatives de ces fonctions. Celles-ci vous permettront de bien garder ces limites usuelles en tête.

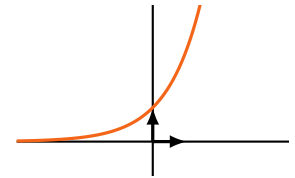
$x \mapsto x^n, n$  pair



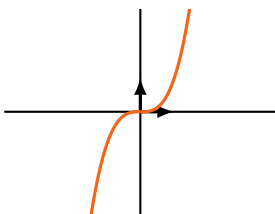
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n$  pair



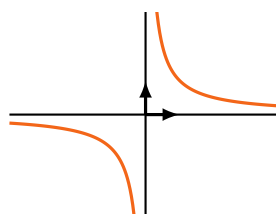
$x \mapsto e^x$



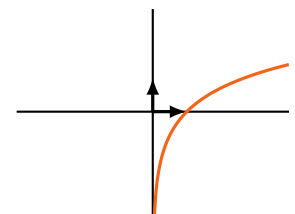
$x \mapsto x^n, n$  impair



$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n$  impair



$x \mapsto \ln x$



### 3 Opérations sur les limites

Les opérations sur les limites sont similaires à celles connues sur les suites. Dans cette partie,  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies au voisinages de  $a$ ,  $a$  pouvant être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ .  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont deux réels.

#### 3.1 Limite de la somme

**Propriété 2 — Limite de la somme :** On a :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell_1$	$\ell_1$	$\ell_1$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>FI</b>

■ **Exemple 13 :** Pour tout réel  $x > 0$ , on pose  $f(x) = x + \ln(x)$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ . Par somme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ . Par somme,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ .

#### 3.2 Limite du produit

**Propriété 3 — Limite du produit :** .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell_1$	$\ell_1 \neq 0$	$\infty$	<b>0</b>
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell_2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$	$\ell_1 \ell_2$	$\infty$ (r.s.)	$\infty$ (r.s.)	<b>FI</b>

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 14 :** On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  non nul par  $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{x}$ .

D'une part,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ . Ainsi, par somme,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

Toutefois, si l'on étudie la limite en  $+\infty$ , nous aboutissons à une forme indéterminée «  $\infty - \infty$  ». Il est alors possible d'utiliser les techniques de calcul déjà employées lors du chapitre sur l'étude des limites de suite, en particulier la factorisation par le terme de plus haut degré.

Ainsi, pour tout réel non nul  $x$ ,  $f(x) = x^2 \times \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$ . Ainsi, par produits,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### 3.3 Limite du quotient

**Propriété 4 — Limite du quotient :** Dans cette partie, on suppose  $\ell_2 \neq 0$ .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell_1$	$\ell_1$	$\ell_1 \neq 0$	$\infty$	0	$\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell_2$	$\infty$	$0^+$ ou $0^-$	$\ell_2, 0^+$ ou $0^-$	0	$\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$\infty$ (r.s.)	$\infty$ (r.s.)	<b>FI</b>	<b>FI</b>

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 15 :** Pour tout réel  $x$ , on pose  $f(x) = \frac{1 - 2x^4}{1 + x^2}$ . L'étude des limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  de  $f$  aboutit à une forme indéterminée. Or, pour tout réel non nul  $x$ ,

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2} \times \frac{\frac{1}{x^4} - 2}{\frac{1}{x^2} + 1} = x^2 \times \frac{\frac{1}{x^4} - 2}{\frac{1}{x^2} + 1}.$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^4} - 2 \right) = -2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} + 1 \right) = 1$ . Ainsi, en appliquant les règles de calcul sur les produits et quotients de limite, on aboutit à  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

■ **Exemple 16 :** On considère la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{1-x}$ , définie sur  $[0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .

**Pour calculer la limite en  $1^+$  :**

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 1-1 = 0$ . Par ailleurs, si  $x \geq 1$ , alors  $1-x \leq 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 0^-$ .  
Ainsi, par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ .
- Par somme de limites,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ .

**Pour calculer la limite en  $1^-$  :**

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 1-1 = 0$ . Par ailleurs, si  $x \leq 1$ , alors  $1-x \geq 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0^+$ .  
Ainsi, par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ .
- Par somme de limites,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ .

**Pour calculer la limite en  $+\infty$  :**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ , ainsi, par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} = 0$ .
- Par somme de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### 3.4 Composition de limites

**Propriété 5 :** Soit  $a, b$  et  $c$  des réels ou  $\pm\infty$ . Soit  $f$  et  $g$  des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = c$ .

Alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ .

■ **Exemple 17 :** On considère la fonction  $f : x \mapsto e^{-2x^2-3x-5}$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 - 3x - 5) = -\infty$ . Par ailleurs,  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ .

Ainsi, par composition de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x^2-3x-5} = 0$ .

La propriété précédente peut s'énoncer dans le cas particulier des suites comme suit.

**Propriété 6 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $(u_n)$  une suite numérique telle que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \in I$ .

Soit  $x_0$  un élément ou une extrémité de  $I$  et  $\ell$  un réel ou  $\pm\infty$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$ .

■ **Exemple 18 :** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{n}{n} \times \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$ .

## 4 Comparaison de limites

### 4.1 Compatibilité du passage à la limite avec la notion d'ordre

**Théorème 1 :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ , soit  $a$  un élément ou un bord de  $I$ .

Si pour tout réel  $x \in I$ , on a  $f(x) \leq g(x)$  et si  $f$  et  $g$  admettent des limites en  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

Attention ! L'inégalité qui résulte est forcément large !

Par exemple, pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\frac{1}{x} > 0$  mais on n'a pas  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} > 0$  !

## 4.2 Théorèmes de comparaison

**Théorème 2 — Théorème de comparaison :** Soit  $a$  un réel ou  $\pm\infty$ . Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  dont  $a$  est un élément ou un bord.

- Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .
- Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

■ **Exemple 19 :** On souhaite montrer que, justement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

Pour tout réel  $x$ , on pose  $f(x) = e^x - x$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = e^x - 1$ .

Ainsi,  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ . On construit alors le tableau de signes de  $f'$  et le tableau de variations de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f$			

On s'aperçoit alors que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq 1$ , et donc que  $e^x \geq 1 + x$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x) = +\infty$ .

D'après le théorème de comparaison, on a donc que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

## 4.3 Théorème d'encadrement

**Théorème 3 — Théorème d'encadrement :** Soit  $a$  un réel ou  $\pm\infty$ . Soit  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  dont  $a$  est un élément ou un bord.

Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  et si  $f$  et  $h$  admettent une même limite **finie**  $\ell$  en  $a$ , alors  $g$  admet également une limite finie en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ .

■ **Exemple 20 :** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et bornée. On souhaite déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

Puisque  $f$  est bornée, posons  $M$  et  $m$  des réels tels que, pour tout réel  $x$ , on a  $m \leq f(x) \leq M$ .

Ainsi, pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\frac{m}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{M}{x}$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M}{x} = 0$ .

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

■ **Exemple 21 :** On rappelle que pour tout réel  $x$ , la partie réelle de  $x$ , notée  $\lfloor x \rfloor$  vérifie  $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ .

Déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ . Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\frac{x-1}{x} \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \frac{x}{x}$  soit  $1 - \frac{1}{x} \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ . D'après le théorème d'encadrement, on a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$ .

## 4.4 Croissances comparées

**Propriété 7 — Croissances comparées :** Soit  $a, b$  et  $c$  des réels strictement positifs. On a

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^a}{x^b} = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{(e^x)^a} = 0 & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^b (e^x)^a = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{\ln(x)^c} = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^c}{x^b} = 0 & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^b (\ln(x))^a = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^a}{\ln(x)^c} = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^c}{(e^x)^a} = 0 & \end{array}$$

**Remarque :** l'utilisation des croissances comparées n'intervient que dans le cas de formes indéterminées !

■ **Exemple 22 :** Pour tout réel  $x$ , on pose  $f(x) = \frac{e^x - x}{e^x}$ .

D'une part, par somme,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ . Par quotient,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

Par ailleurs, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{e^x} - \frac{x}{e^x} = 1 - \frac{x}{e^x}$ .

Or, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

■ **Exemple 23 :** Pour tout réel  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \frac{x + \ln(x)}{x + 1}$ .

D'une part, par somme,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln(x)) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$ . Par quotient,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ .

Par ailleurs, pour tout réel  $x > 0$ , on a  $f(x) = \frac{x}{x} \times \frac{1 + \frac{\ln(x)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{\ln(x)}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . Par ailleurs, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ .

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

## 5 Théorème de limite monotone

**Théorème 4 :** Soit  $f$  une fonction monotone sur un intervalle  $]a; b[$ . Alors,

- $f$  admet en tout point de l'intervalle  $]a, b[$  une limite **finie** à droite et à gauche (non forcément égale) ;
- $f$  admet une limite à gauche en  $a$  et une limite à droite en  $b$ .

Plus précisément, on a les résultats suivants :

	$f$ croissante	$f$ décroissante
$f$ majorée	limite finie en $b$	limite finie en $a$
$f$ minorée	limite finie en $a$	limite finie en $b$
$f$ non majorée	$\lim_{x \rightarrow b^-} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} = +\infty$
$f$ non minorée	$\lim_{x \rightarrow a^+} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow b^-} = -\infty$