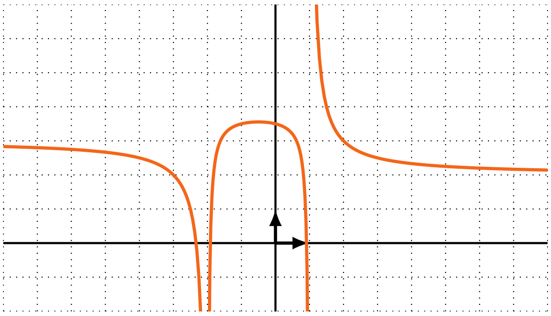
Exercices : Limites de fonctions

Notion de limite

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dans un repère orthonormé.

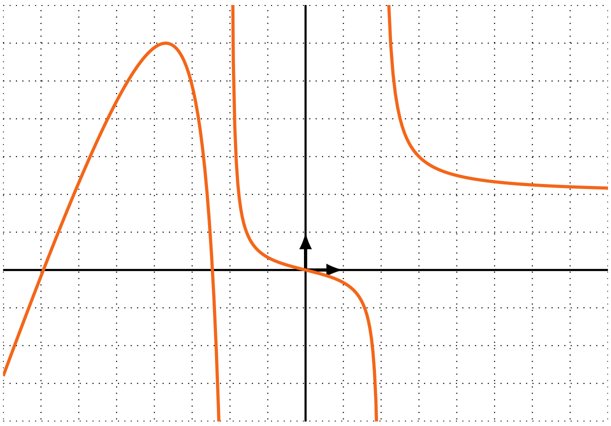


A l'aide de cette représentation graphique, déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f ?

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement les valeurs de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathcal{C}_f$?

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donnée ci-dessous. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$		-4		2		5		7		$+\infty$
f	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	1

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à $\mathcal{C}_f$?
3. Dans un repère orthonormé, tracer une courbe d'une fonction compatible avec ce tableau de variations.

Opérations sur les limites

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x-3)$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x-3)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x+1\right)$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+1\right)$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

l. $\lim\limits_{x\to+\infty}((1-2x)\mathrm{e}^x)$

m. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-x^2+7x-3}\right)$

n. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

o. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

p. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-x)$

q. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$

r. $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x-12}{2x^2+x-3}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Construire le tableau de variations de la fonction f sur D.
4. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}$.

Donner le domaine de définition de f puis déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

En utilisant des factorisations, déterminer $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2}$.

Comparaison de limites

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

1. Montrer que pour tout réel x, on a $1+x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1+x\mathrm{e}^x$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

On rappelle que pour tout réel x, on a $x-1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$. Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x-1} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

L'objectif ici est de démontrer l'un des résultats de croissances comparées, à savoir $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x - x \geqslant 0$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}$.
   (a) Construire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.
3. Conclure.

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $\ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$ puis que $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Retrouver alors un des résultats de croissances comparées du cours.

▶ Exercice 13 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5\mathrm{e}^{-x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5\mathrm{e}^{-x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}$ **e.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}$ **f.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}$ **h.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{28x}$ **i.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{28x}$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x-3x^2+5x-1)$ **k.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x-3x^2+5x-1)$ **l.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

m. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$ **n.** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$ **o.** $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

▶ Exercice 14 – Voir le corrigé

La fonction tangente hyperbolique est la fonction notée th et définie pour tout réel x par

$$th(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} th(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x)$.
2. Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,
$$th'(x) = \frac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$
3. En déduire le tableau de variations de th.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction th à l'abscisse 0.
5. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de la courbe th ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire le tableau de variations de f. On inclura dans ce tableau les limites de f et la valeur exacte de son extremum.
5. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
6. Tracer, dans un repère orthonormé, l'allure de la courbe C_f ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Pour chacune des fonctions suivantes

- Déterminer le domaine de définition ;
- Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son domaine de définition ;
- Construire le tableau de variations de la fonction ;
- Tracer l'allure de la courbe dans un repère orthonormé

$f_1 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2+1}$	$f_2 : x \mapsto x^x$	$f_3 : x \mapsto \ln(1+e^x)$
$f_4 : x \mapsto \ln(e^x+e^{-x})$	$f_5 : x \mapsto x^2e^{-x^2}$	$f_6 : x \mapsto x^{1/x}$