Ensembles et dénombrement

1 Ensembles

1.1 Quelques rappels

Définition 1 : Un ensemble est une collection d'objets. Celui-ci peut-être défini de plusieurs manières :

- **en extension** : cela revient à écrire les éléments que cet ensemble contient ;
- **en compréhension** : cela revient à décrire les éléments d'un ensemble à l'aide d'une condition que les éléments de l'ensemble, et uniquement eux respectent.

Donnons alors quelques notations communes qu'il est bon d'adopter dès à présent. Soit E un ensemble.

- **Appartenance à un ensemble** : on écrira $x \in E$ pour signifier que x est un élément de l'ensemble E et $x \notin E$ dans le cas contraire.
- **Ensemble privé d'un élément** : si x un élément de E, alors $E \setminus \{x\}$ (E privé de x) désigne l'ensemble de tous les éléments de E, sauf x.
- **Ensemble privé de 0** : Si $0 \in E$, on écrira souvent E^* pour désigner $E \setminus \{0\}$.
- **Ensemble vide** : Celui-ci se note $\varnothing$; c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

■ **Exemple 1 :** L'ensemble $E = \{1;7;\pi\}$ est écrit en extension. Il contient 3 éléments qui sont 1, 7 et π.

■ **Exemple 2 :** L'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x+3y-2x = 0\}$ est décrit en compréhension. Par exemple,

- $(1;2;4) \in F$: en effet, on a $2\times 1 + 3 \times 2 - 2 \times 4 = 0$;
- $(2;2;2) \notin F$: en effet, on a $2 \times 2 + 3 \times 2 - 2 \times 2 = 6 \neq 0$;
- $7 \notin F$: en effet, 7 n'est même pas un élément de $\mathbb{R}^3$.

■ **Exemple 3 :** Soit $G = \{(2x;x+y;3y)\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

- $(2;2;3) \in G$. En effet, soit x et y deux réels. On a

$$\begin{cases} 2x & = 2 \\ x + y &= 2 \\ 3y &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases}$$

  Puisque l'on a trouvé deux réels x et y tels que $(2;2;3) = (2x;x+y;3y)$, on a bien que $(2;2;3) \in G$.
- $(4;7:6) \notin G$. En effet, soit x et y deux réels. On a

$$\begin{cases} 2x & = 4 \\ x + y &= 6 \\ 3y &= 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2 \\ 2+2 &= 6 \\ y &= 2 \end{cases}$$

  ce qui est absurde...

1.2 Inclusion

Définition 2 : Soit E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** de F si tout élément de E est aussi un élément de F. On notera $E \subset F$.

Méthode 1 : Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F ;

- On considère un élément quelconque de E en écrivant par exemple « Soit $u \in E$ » ;
- On montre que cet élément u est aussi dans F.

Pour montrer qu'un ensemble E n'est pas inclus dans un ensemble F, il suffit de trouver un élément de E qui n'est pas dans F.

Exemple 4 : Soit $E = \{1;5;7\}$, $F = \{1;3;5;7;9\}$ et $G = \{2;5;7\}$.

- On a $E \subset F$ puisque les trois éléments de E sont aussi dans F ;
- En revanche, $E \not\subset G$ puisque $1 \in E$ mais $1 \notin G$.

R Il ne faut pas oublier que les variables sont muettes lorsque l'on définit les ensembles par compréhension. Le « x » utilisé dans le premier ne désigne pas forcément la même chose que le « x » du deuxième. D'ailleurs, si cela vous embrouille, n'hésitez pas à renommer vos variables pour qu'elles aient toutes des noms différents... mais évitez tout de même les fantaisies.

Exemple 5 : On considère les ensembles $E = \{(x;2x;3x), x \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x - y - z = 0\}$.

- Montrons que E est inclus dans F. Soit $u \in E$: on pose $x \in \mathbb{R}$ tel que $u = (x;2x;3x)$.

  Montrons alors que $u \in F$. Dans la définition de F, les x, y et z désignent les « coordonnées » de l'élément de $\mathbb{R}^3$ que l'on considère. Ici, ces coordonnées sont x, $2x$ et $3x$.

  Par ailleurs, on a $5x - 2x - 3x = 0$. Les « coordonnées » de u vérifient donc l'équation qui caractérise l'ensemble F. On a donc $u \in F$. Ainsi, $E \subset F$.
- Montrons maintenant que $F \not\subset E$.
  Prenons par exemple $u = (0;-1;1)$. On a bien $u \in F$: en effet, $5 \times 0 - (-1) + 1 = 0$.
  Montrons désormais que $u \notin E$. Soit x un réel, on a

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x = -1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1/2 \\ x = 1/3 \end{cases}$$

  ce qui est absurde...

Conclusion : On a montré que $E \subset F$ mais $F \not\subset E$.

Méthode 2 : Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on montre que $E \subset F$ et $F \subset E$.

Exemple 6 : Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x - y = 1\}$ et $F = \{(t+1, 4t+3), t \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $E = F$.

- Soit $u = (x,y) \in E$. On a alors $4x - y = 1$.
  Procédons par analyse-synthèse : supposons qu'il existe un réel t tel que $x = t+1$ et $y = 4t+3$. On a alors nécessairement $t = x - 1$.

Posons alors $t = x - 1$. On a alors
- $x = t + 1$;
- Puisque $4x - y = 1$, on a $y = 4x - 1 = 4(t+1) - 1 = 4t + 3$.

Ainsi, $u \in F$. On a montré que $E \subset F$.

- Soit $u \in F$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $u = (t+1, 4t+3)$. On a alors $4(t+1) - (4t+3) = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$. Ainsi $u \in E$ et on a donc montré que $F \subset E$.

Conclusion : On a montré que $E \subset F$ et $F \subset E$. Ainsi, $E = F$.

1.3 Cardinal d'ensembles

Définition 3 : Soit A un ensemble ayant un nombre fini d'éléments.

On appelle **Cardinal** de A, noté $\text{Card}(A)$, $\sharp A$ ou $|A|$ le nombre d'éléments de A.

Dénombrer, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, sans nécessairement donner la liste de tous ses éléments.

■ **Exemple 7 :** Soit $E = \{1; 3; \sqrt{2}\}$. On a $\text{Card}(E) = 3$.

■ **Exemple 8 :** Attention aux notations. $\varnothing$ désigne l'ensemble vide alors que $\{\varnothing\}$ désigne un ensemble qui contient un élément, cet élément étant l'ensemble vide.

On a en particulier $\text{Card}(\varnothing) = 0$ et $\text{Card}(\{\varnothing\}) = 1$.

Les applications peuvent nous aider à dénombrer certains ensembles.

Propriété 1 : Soit E et F deux ensembles finis.
- S'il existe une application injective de E dans F, alors $\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$;
- s'il existe une application surjective de E dans F, alors $\text{Card}(E) \geqslant \text{Card}(F)$;
- s'il existe une application bijective de E dans F, alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Démonstration 1 : Notons x_1, x_2, ..., x_n les éléments de E.
- Supposons qu'il existe une injection f de E dans F.
  Alors $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... $f(x_n)$ sont des éléments distincts de F (mais il y en a peut-être d'autres). On a donc $\text{Card}(F) \geqslant \text{Card}(E)$.
- Soit g une application de E dans F.
  Alors $g(x_1)$, $g(x_2)$, ... $g(x_n)$ sont au plus n éléments de F. Ainsi, si $\text{Card}(F) > \text{Card}(E)$, il y a forcément des éléments sans antécédent dans F.
  Par contraposée, si tout élément admet un antécédent par g, alors $\text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(F)$.

Le troisième point s'obtient facilement à l'aide des deux premiers. □

Ainsi, pour dénombrer certains ensembles, nous aurons parfois recours à la bijection. Pour déterminer le cardinal d'un ensemble, nous établirons une bijection avec un ensemble pour lequel nous savons compter le nombre d'éléments facilement.

De cette proposition, on en déduit les suivantes.

Propriété 2 : Soit E et F deux ensembles finis.

- Si $E \subset F$, alors $\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$.
- Si $E \subset F$ et $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors $E = F$.

Démonstration 2 : Il suffit de remarquer que l'application id_E est bijective. □

2 Opérations sur les ensembles

2.1 Union et intersection

Définition 4 : Soit A et B deux ensembles.

- L'**union** de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ qui contient tous les éléments qui sont au moins dans l'ensemble A ou dans l'ensemble B.
- L'**intersection** de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.
- Deux ensembles A et B sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun, càd $A \cap B = \varnothing$.
Dans ce cas, l'union de A et B est dite disjointe et s'écrit $A \sqcup B$.

■ **Exemple 9 :** On considère les ensemble $A = \{1;3;4;5;8\}$ et $B = \{1;2;4;6;7\}$.

Alors $A \cup B = \{1;2;4;5;6;7;8\}$ et $A \cap B = \{1;4\}$.

En particulier, les ensembles A et B ne sont pas disjoints.

■ **Exemple 10 :** Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-2y+z=0\}$.

Déterminons $E \cap F$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$u \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \phantom{x+{}} 3y \phantom{{}+z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \text{On a } E \cap F = \{(-z,0,z), z \in \mathbb{R}\}.}$

Définition 5 : Soit A_1, A_2, ..., A_n des sous-ensembles d'un ensemble E.

- L'union de tous les A_i est l'ensemble noté $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ qui contient tous les éléments qui sont au moins dans un des ensembles A_i.

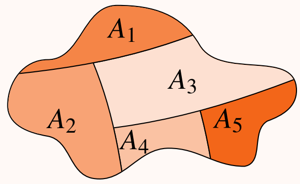
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \,|\, \exists i \in [\![1;n]\!], x \in A_i\}$$

- L'intersection de tous les A_i est l'ensemble noté $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ qui contient tous les éléments qui sont dans tous les ensembles A_i.

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \,|\, \forall i \in [\![1;n]\!], x \in A_i\}$$

Définition 6 :

Soit Ω un ensemble et $A_1, A_2, ..., A_n$ des sous-ensembles de Ω.
On dit que les ensembles $A_1, ..., A_n$ forment une **partition** de Ω si ces ensembles sont deux à deux disjoints et si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.



Propriété 3 : Soit n un entier naturel non nul et $A_1, A_2, ..., A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i)$$

Une approche possible du dénombrement est d'établir une disjonction de cas pour découper le problème que l'on étudie en d'autres problèmes plus petits que l'on sait dénombrer.

■ **Exemple 11 :** Un tournoi de mathématiques est organisé entre 256 joueurs. A chaque manche du tournoi, les participants sont répartis en groupes de 4 candidats et chaque groupe se voit alors attribuer une épreuve à l'issue de laquelle un seul candidat parmi les 4 du groupe pourra se qualifier. A la fin de ce tournoi, il n'y a qu'un seul vainqueur. Combien d'épreuves auront lieu au total ?

- Notons E_1 les épreuves de la première manche. Puisqu'il y a 256 candidats répartis en groupe de 4, il y aura $\frac{256}{4}$ soit 64 épreuves, à l'issue desquelles il restera 64 participants. On a $\text{Card}(E_1) = 64$.
- Notons E_2 les épreuves de la deuxième manche. Puisqu'il reste 64 candidats répartis en groupe de 4, il y aura $\frac{64}{4}$ soit 16 épreuves, à l'issue desquelles il restera donc 16 participants. On a $\text{Card}(E_2) = 16$.
- De même, si l'on note E_3 et E_4 le nombre d'épreuves aux troisièmes et quatrièmes manches, on a $\text{Card}(E_3) = 4$ et $\text{Card}(E_4) = 1$.

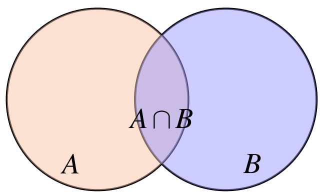
Les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont disjoints : il n'est pas possible qu'une épreuve se déroule sur deux manches différentes. Par ailleurs, l'union de ces ensembles constitue l'ensemble de toutes les épreuves. Ainsi, le cardinal de l'ensemble de toutes les épreuves de la compétition est égal à la somme des cardinaux de ces 4 ensembles. Il y a donc $64+16+4+1$ soit 85 épreuves dans cette compétition.

Tout ce raisonnement peut vous sembler inutilement compliqué pour une situation aussi simpliste que celle-là, mais il faut parfois savoir préciser à outrance les objets et les ensembles que l'on manipule pour être certains que les outils mathématiques que nous utilisons sont les bons.

Propriété 4 — Formule du crible : Soit A et B des ensembles finis

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Si l'on compte le nombre d'éléments de A et que l'on ajoute le nombre d'éléments de B, certains éléments ont alors été compté deux fois : ceux communs à A et B (c'est-à-dire les éléments de $A \cap B$).
En retirant le nombre d'éléments de cette intersection à notre compte, on obtient alors le nombre d'éléments de l'union.



■ **Exemple 12 :** Pour accompagner leurs frites à la cantine, 150 élèves choisissent leur sauce entre ketchup et mayonnaise (éventuellement les deux). On suppose que tous les élèves ont pris au moins une sauce. Par ailleurs, 92 élèves ont pris du ketchup et 97 ont pris de la mayonnaise. Combien ont pris les deux sauces ?

Notons K l'ensemble des élèves ayant pris du ketchup et M l'ensemble des élèves ayant pris de la mayonnaise. On a alors $\text{Card}(K) = 92$ et $\text{Card}(M) = 97$. De plus, chaque élève ayant pris au moins une sauce, on a alors $\text{Card}(K \cup M) = 150$. Or, $\text{Card}(K \cup M) = \text{Card}(K) + \text{Card}(M) - \text{Card}(K \cap M)$.
Ainsi, $\text{Card}(K \cap M) = 97 + 92 - 150 = 49$. 49 élèves ont pris à la fois du ketchup et de la mayonnaise.

Propriété 5 : Soit A, B et C trois ensembles. On a alors

$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$.
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$

2.2 Complémentaire

Définition 7 : Soit A et B deux ensembles.

- On appelle différence de B dans A l'ensemble $A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$.
- Si A est inclut dans un ensemble E, l'ensemble $E \setminus A$ est appelé complémentaire de A dans E.
  Il est noté $\overline{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E.

■ **Exemple 13 :** Soit $A = \{1;2;3;5;8;10\}$ et $B = \{1;4;8\}$. On a alors $A \setminus B = \{2;3;5;10\}$.

Théorème 3 — Lois de De Morgan : Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Démonstration 4 : On montre la première égalité en procédant par double implication. La seconde égalité est donnée à titre d'exercice.

- Soit $x \in \overline{A \cup B}$. On a alors $x \notin A \cup B$. Ainsi, $x \notin A$ (et donc $x \in \overline{A}$) et $x \notin B$ (et donc $x \in \overline{B}$). Ainsi, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
  On a montré que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
- Soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Ainsi, $x \notin A$ et $x \notin B$. Ainsi, $x \notin A \cup B$ et donc $x \in \overline{A \cup B}$.
  On a montré que $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Finalement, par double inclusion, on a $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. □

2.3 Produit cartésien

Définition 8 : Soit A et B deux ensembles.

- On appelle **produit cartésien** de A et B, noté $A \times B$ (A "croix" B), l'ensemble composé des couples $(a;b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
- Le produit cartésien $A \times A$ est également noté A^2.

■ **Exemple 14 :** On considère les ensembles $A = \{2;5;9\}$; et $B = \{3;5\}$.

- Les éléments de $A \times B$ sont $(2;3)$, $(2;5)$, $(5;3)$, $(5;5)$, $(9;3)$ et $(9;5)$.
- Les éléments de $B \times A$ sont $(3:2)$, $(3;5)$, $(3;9)$, $(5;2)$, $(5;5)$, $(5;9)$.
- Les éléments de B^2 sont $(3;3)$, $(3;5)$, $(5;3)$ et $(5;5)$.

On remarque sur cet exemple que le produit cartésien n'est pas commutatif !

Définition 9 : La notion de **produit cartésien** s'étend naturellement à plus de deux ensembles.

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. le produit cartésien de n ensembles A_1, A_2, ..., A_n est l'ensemble des n-uplets (ou n-listes) $(a_1;a_2;\dots;a_n)$ avec $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ... $a_n \in A_n$.
- Le produit cartésien $A \times A \times ... \times A$ où A apparaît n fois est noté A^n. Ses éléments sont appelés les **n-uplets** de A.

Exemple 15 : On considère les ensembles $A = \{1;2;4\}$, $B = \{3;7;14\}$ et $C = \{1;3\}$.

- $(1;7;3) \in A \times B \times C$ puisque $1 \in A$, $7 \in B$ et $3 \in C$.
- $(3;7;7;3;14) \in B^5$ puisque 3, 7 et 14 sont dans l'ensemble B.

Propriété 6 : Soit A et B des ensembles finis.

- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.
- Plus généralement, soit n un entier naturel, A_1, A_2, ..., A_n des ensembles finis.

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \dots \times \text{Card}(A_n).$$

- En particulier, pour tout entier naturel n, on a $\text{Card}(A^n) = [\text{Card}(A)]^n$.

Exemple 16 : On reprend les ensembles $A = \{1;2;4\}$, $B = \{3;7;14\}$ et $C = \{1;3\}$. On a

- $\text{Card}(A \times B) = 3 \times 3 = 9$;
- $\text{Card}(A \times B \times C) = 3 \times 3 \times 2 = 18$;
- $\text{Card}(A^4) = 3^4 = 81$;
- $\text{Card}(C^{10}) = 2^{10} = 1024$.

Méthode 3 : Le produit cartésien est utilisé pour dénombrer des situations où l'ordre des symboles (chiffres, lettres, signes...) est important et où ces symboles peuvent être utilisés plusieurs fois.

Exemple 17 : A l'entrée d'un bâtiment est installé un digicode. Pour composer le code, on utilise 4 chiffres compris entre 1 et 6 suivis de deux lettres parmi les lettres A, B, C et D. Un chiffre ou une lettre peuvent être utilisés plusieurs fois. Combien de codes sont possibles ?

On note $E = \{1;2;3;4;5;6\}$ et $F = \{A;B;C;D\}$. Un digicode est un élément de $E^4 \times F^2$. Le cardinal de cet ensemble est donc $\text{Card}(E)^4 \times \text{Card}(F)^2 = 6^4 \times 4^2 = 20736$.

Il y a donc 20736 digicodes possibles.

3 Arrangements et permutations

Définition 10 : Soit n un entier naturel non nul. On note $n!$ (**factorielle** de n) le produit de tous les entiers de 1 à n. Ainsi, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

Par ailleurs, on convient que $0! = 1$.

Il est également possible de définir la factorielle par récurrence, en stipulant que $0! = 1$ et que, pour tout entier naturel n, $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

■ **Exemple 18 :** $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$; $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8\times7\times6!}{6!} = 8\times7 = 56.$

Définition 11 : Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n.

Un k-**arrangement** de A est un k-uplet d'éléments distincts de A.

Lorsque $k = n$, on parle de **permutation** de A.

■ **Exemple 19 :** On considère l'ensemble $A = \{1;3;4;5;7;10\}$.

- $(7;10;3)$ est un 3-arrangement de A.
- $(10;5;4;1)$ est un 4-arrangement de A.
- En revanche, $(7;10;1;7)$ n'est pas un arrangement de A car l'élément 7 y apparaît deux fois.
- $(3;7;4;5;1;10)$ est par ailleurs une permutation de A puisque tous les éléments de A y apparaissent.

Propriété 7 : Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n.

Le nombre de k-arrangements de A vaut $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

En particulier, le nombre de permutations de A vaut $n!$.

Démonstration 5 : Pour construire un k-uplet d'éléments distincts de A, on a

- n choix pour le premier élément
- $n-1$ choix pour le deuxième
- ...
- $n-(k-1)$ pour le k-ième

Le nombre de k arrangements de A vaut donc $n\times(n-1)\times\ldots\times n-(k+1)$, ce que l'on peut réécrire en

$$n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(k-1))\times\frac{(n-k)\times(n-k-1)\times\ldots\times2\times1}{(n-k)\times(n-k-1)\times\ldots\times2\times1} = n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(k-1))\times\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

d'où

$$n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(k-1))\times\frac{(n-k)\times(n-k-1)\times\ldots\times2\times1}{(n-k)\times(n-k-1)\times\ldots\times2\times1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

■ **Exemple 20 :** On considère l'ensemble $A = \{1;3;4;5;7;9;11\}$, de cardinal 7.

Le nombre de 3-arrangements de A vaut $7\times6\times5 = 210$.

Propriété 8 : Soit E et F deux ensembles finis de cardinal n.

Le nombre de bijections de E dans F est égal à $n!$.

Démonstration 6 : L'idée de la démonstration est similaire à ce qui a été fait précédemment. Notons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les éléments de E et considérons une bijection σ et E dans F.

- On a alors n choix pour choisir $\sigma(x_1)$ parmi les n éléments de F ;
- Puisque σ est bijective, elle est en particulier injective. Ainsi, on a $\sigma(x_2)\neq\sigma(x_1)$ ce qui laisse $n-1$ choix possibles pour $\sigma(x_2)$.
- De la même manière, on a $n-2$ choix pour $\sigma(x_3)$ et ainsi de suite jusqu'à $\sigma(x_n)$.

Il reste à vérifier que l'application ainsi construite est bien surjective. Puisque σ est injective, il y a une bijection entre E et $\sigma(E)$. Or $\sigma(E) \subset F$ et $\text{Card}(\sigma(E)) = \text{Card}(E) = n$. Ainsi, on a bien $\sigma(E) = F$. □

Méthode 4 : Les arrangements sont utilisés pour dénombrer des situations où l'ordre des objets (chiffres, nombres, lettres, signes,...) est important mais où chaque objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

■ **Exemple 21 :** Une cours hippique réunit 8 jockeys et leurs chevaux. Le "quarté dans l'ordre" est un pari qui consiste à deviner les quatre premiers chevaux arrivés dans l'ordre. Combien de paris différents est-il possible de réaliser ?

- On a 8 choix pour le premier cheval arrivé.
- Il reste 7 choix pour le deuxième, 6 pour le troisième et 5 pour le quatrième.
- Le nombre total de paris est donc $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.

Formellement, si on nomme A l'ensemble des chevaux de la course, un quarté dans l'ordre est un 4-arrangement de A.

4 Combinaisons d'un ensemble fini

4.1 Coefficient binomial

Définition 12 : Une **partie** ou **combinaison** d'un ensemble fini A est un ensemble inclus dans A. L'ensemble des parties de A est noté $\mathcal{P}(A)$.

■ **Exemple 22 :** Soit $A = \{1;2;3\}$. Les parties de A sont $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ et $\{1;2;3\}$. Elles sont au nombre de 8

Attention à ne pas oublier l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble complet A lui-même en établissant cette liste.

Propriété 9 : Soit A un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties de A est 2^n.

Démonstration 7 : Nous allons établir une bijection de $\mathcal{P}(A)$ dans $\{0,1\}^n$. Puisque $\{0;1\}$ possède 2 éléments, le cardinal de $\{0;1\}^n$ vaut donc 2^n.

L'idée est la suivante : Pour chaque élément de A, on a deux choix pour construire une partie de A ; soit cet élément appartient à la partie que l'on construit, soit il ne lui appartient pas.

On a donc

- 2 choix pour le premier élément de A
- 2 choix pour le deuxième élément...
- ...
- 2 choix pour le n-ième élément de A.

Ainsi, le cardinal de $\mathcal{P}(A)$ vaut $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$.

De manière formelle : Notons a_1, a_2 , ..., a_n les éléments de A. Soit B une partie de A. On construit un n-uplet $(b_0;b_1;...;b_n)$ de $\{0;1\}$ comme suit : pour tout entier naturel i entre 1 et n

- $b_i = 1$ si $a_i \in B$
- $b_1 = 0$ sinon.

Chaque partie de A est ainsi associé de manière unique à un n-uplet de $\{0;1\}$ et réciproquement. Les cardinaux de $\mathcal{P}(A)$ et $\{0;1\}^n$ sont donc égaux. □

Définition 13 : Soit A un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel n.

Le nombre de combinaisons à k éléments de A est noté $\binom{n}{k}$ et se lit "k parmi n".

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux

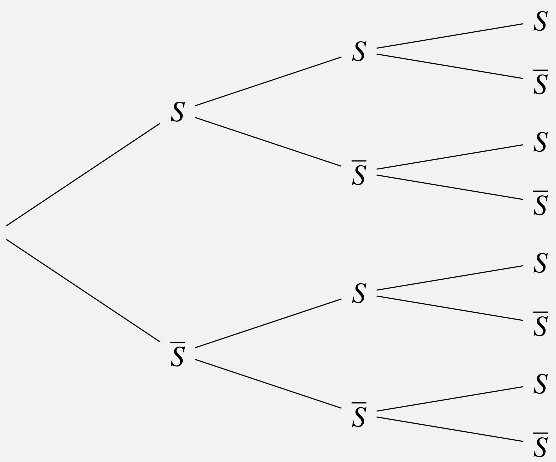
■ **Exemple 23 :** Soit $A = \{1 : 2 : 3 : 4 : 5\}$. Les parties à deux éléments de A sont $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{1;5\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$ et $\{4;5\}$. Il y en a 10 : ainsi, $\binom{5}{2} = 10$.

Attention, l'ordre n'a pas d'importance lorsque l'on parle de partie d'un ensemble : le sous-ensemble $\{1;2\}$ est le même que le sous-ensemble $\{2;1\}$.

Propriété 10 : Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins qui, dans un arbre à n épreuves, aboutissent à exactement k succès.

■ **Exemple 24 :** On considère arbre à 3 épreuves.



Pour obtenir 2 succès, il y a 3 chemins possibles : $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS$. Ainsi, $\binom{3}{2} = 3$.

4.2 Calcul des coefficients binomiaux

Propriété 11 : Soit n un entier naturel. On a alors $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Démonstration 8 : Il n'existe qu'un seul ensemble à 0 élément, il s'agit de l'ensemble vide $\varnothing$. De la même manière, si A est un ensemble à n éléments, la seule partie de A ayant n éléments est l'ensemble A lui-même.

Ainsi, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. □

Propriété 12 : Soit n un entier naturel non nul. Alors $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Démonstration 9 : Si A est un ensemble fini $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ de cardinal supérieur ou égal à 1, les parties à 1 élément de A sont simplement les singletons $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, ... , $\{a_n\}$.

Les parties à $n-1$ éléments sont quant à elles $A \setminus \{a_1\}$, ..., $A \setminus \{a_n\}$.

Ainsi, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. □

Propriété 13 : Soit n un entier naturel non nul.

Pour tout entier naturel $k \in [\![1;n]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration 10 : Choisir k objets parmi n revient à exclure $n-k$ objets parmi ces n objets.

Ainsi, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. □

Propriété 14 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $k \in [\![0;n-1]\!]$. On a alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Cette relation s'appelle la relation de Pascal.

Démonstration 11 : Soit A un ensemble fini à $n+1$ éléments et $a \in A$. Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$.

L'ensemble des combinaisons à $k+1$ éléments, noté $\mathcal{P}_{k+1}(A)$, est, par définition, de cardinal $\binom{n+1}{k+1}$.

Cet ensemble peut toutefois se décomposer en deux ensembles disjoints :

- P_1, l'ensemble des combinaisons à $k+1$ éléments de A qui contiennent l'élément a. Il reste donc à choisir k éléments parmi les n restants. Le cardinal de cet ensemble est donc $\binom{n}{k}$;
- P_2, L'ensemble des combinaisons à $k+1$ éléments de A qui ne contiennent pas l'élément a. Il faut donc choisir $k+1$ éléments parmi les n autres éléments. Le cardinal de P_2 est donc $\binom{n}{k+1}$.

On a alors $\mathcal{P}_k(A) = P_1 \cup P_2$ ce qui implique que $\binom{n+1}{k+1} = \text{Card}(\mathcal{P}_k(A)) = \text{Card}(P_1 \cup P_2)$. Or, les ensembles P_1 et P_2 sont disjoints. Ainsi, $\text{Card}(P_1 \cup P_2) = \text{Card}(P_1) + \text{Card}(P_2)$.

Autrement dit, on a $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. □

Propriété 15 : La relation de Pascal permet de construire récursivement les coefficients binomiaux. Ces coefficients peuvent être arrangés en triangle et forment ce que l'on appelle le triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Dans ce triangle, on démarre avec un 1 en haut à gauche. Pour compléter chaque cellule, on ajoute alors le nombre au-dessus avec le nombre en haut à gauche. Les cases vides se voient assigner la valeur 0. On peut alors lire les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ dans ce triangle.

Cette relation, bien qu'efficace d'un point de vue algorithmique, est laborieuse à exploiter lorsque les coefficients en jeu sont grands. Elle va toutefois nous permettre de dégager une formule déjà bien connue.

Propriété 16 : Soit n un entier naturel et $k \in [\![0;n]\!]$. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Démonstration 12 : Démontrons ce résultat par récurrence.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a seulement le cas $k = 0$ à vérifier. Or, $\binom{0}{0} = 1$ et $\dfrac{0!}{0!(0-0)!} = 1$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi, $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

  Soit $k \in [\![0;n]\!]$. D'après la relation de Pascal, on a

  $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

  Par hypothèse de récurrence, on a donc

  $$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$$

  Remarquons alors que $(k+1)! = k \times (k+1)$ et $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)! = (n-k)(n-(k+1))!$. Pour mettre ces quotients au même dénominateur, on multiplie donc les numérateurs et dénominateur du premier par $(k+1)$ et ceux du deuxième par $(n-k)$. On a donc

  $$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}.$$

  Il reste toutefois à vérifier que la formule convient lorsque $k = n+1$.
  On a $\binom{n+1}{n+1} = 1$ et $\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!((n+1)-(n+1))!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = 1$. Finalement, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;n]\!]$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

□

■ **Exemple 25 :** On a $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!3!} = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 8\times 7 = 56.$

Méthode 5 : Les combinaisons sont utilisées pour dénombrer les situations où l'ordre des objets n'est pas important - lorsque l'on tire simultanément plusieurs personnes ou objets au hasard par exemple - et qu'un objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

■ **Exemple 26 :** A la belote, on utilise un jeu de 32 cartes. Chaque carte est déterminé par sa couleur (Pique, Trèfle, Carreau, Coeur) et sa valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Pour le premier tour de distribution, chaque joueur reçoit 5 cartes, que l'on appelle une main.

Combien existe-t-il de mains comportant exactement 2 as ?

L'ordre de distribution des cartes n'a pas d'importance ici : recevoir un as en première carte ou en deuxième carte n'a pas d'influence, on utilise donc les combinaisons.

- La main est composée de 2 as, choisis parmi 4, ce qui donne $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$ possibilités.
- Il reste 3 cartes à déterminer, choisis parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as.
  Cela donne $\binom{28}{3} = \frac{28!}{3!(28-3)!} = \frac{28!}{3!25!} = \frac{28\times 27\times 26}{3\times 2\times 1} = 3276.$
- Au total, cela fait $6\times 3276 = 19656$ mains de 5 cartes contenant exactement 2 as.

5 Binôme de Newton

5.1 Pour les réels

Théorème 13 — Binôme de Newton : Soit a et b des réels et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration 14 : Fixons a et b deux réels.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ »

- **Initialisation** : On a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

On procède au changement d'indice $j=k+1$ dans la première somme. Ainsi,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n-(j-1)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}\end{aligned}$$

On extrait alors le terme pour $k=n+1$ de la première somme et le terme pour $k=0$ de la deuxième. Ainsi,

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}+\binom{n}{0}a^0b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$$

Regroupons les deux sommes

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1}+b^{n+1}$$

Or, d'après la formule de Pascal, $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$. Par ailleurs, $a^{n+1}=\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)}$ et $b^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^0b^{n+1-0}$. Il en vient que

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1}+\binom{n+1}{0}a^0b^{n+1-0}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

□

■ **Exemple 27 :** Pour tous réels x et y, on a

- $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$;
- $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$;
- $(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+3xy^3+y^4$.

■ **Exemple 28 :** Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}(2+x)^4 &= \binom{4}{0}2^0x^{4-0}+\binom{4}{1}2^1x^{4-1}+\binom{4}{2}2^2x^{4-2}+\binom{4}{3}2^3x^{4-3}+\binom{4}{4}2^4x^{4-4}\\ &= 1\times 1+x^4+4\times 2\times x^3+6\times 4\times x^2+4\times 8\times z+1\times 16\\ &= x^4+8x^3+24x^2+32x+16\end{aligned}$$

■ **Exemple 29 :** Pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

La somme des coefficients binomiaux vaut 2^n.

5.2 Pour les matrices

Théorème 15 — Binôme de Newton : Soit p un entier naturel non nul, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui **commutent** (c'est-à-dire que $AB = BA$).

Alors, pour tout entier naturel n

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Démonstration 16 : La démonstration est similaire au cas réel.

Le fait que A et B commutent est indispensable pour établir l'hérédité de la proposition. □

Remarque : cette formule est notamment utile lorsque l'une des matrices est l'identité, puisque la matrice identité commute avec toutes les matrices.

■ **Exemple 30 :** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose $B = A - I_3$.

On a alors $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$.

Ainsi, pour tout entier naturel $k \geqslant 3$, on aura $B^k = 0_3$.

Soit n un entier naturel. On souhaite calculer A^n, c'est-à-dire $(B+I_3)^n$. Puisque B et I_3 commutent, on a donc

$$A^n = (B+I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k.$$

Or,puisque $B_k = 0_3$ dès que $k \geqslant 3$, cette somme s'arrête à l'indice 2. Ainsi,

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.$$

Finalement, pour tout entier naturel n, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$