Ensembles et dénombrement

Ensembles et opérations

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Soit $E = [\![1;10]\!]$, $A = \{1;2;4;7;8\}$, $B = \{x \in E \,|\, (x-3)^2 \leqslant 5\}$, $C = \{9;10\}$.

Écrire les ensembles suivants en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments).

B $\qquad A \cup B$ $\qquad \overline{A}$ $\qquad B \cap \overline{C}$ $\qquad (A \cup \overline{B}) \setminus C$

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

Écrire en extension les ensembles suivants.

$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \sqrt{2} < n \leqslant 2\pi\}$ $\qquad B = \{n \in [\![1;20]\!] \,|\, \exists k \in \mathbb{N}, n = 6k\}$ $\qquad C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \forall y \in \mathbb{R}, xy = 0\}$

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère les ensembles $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x + 2y - z = 0\}$ et $F = \{(x, -2x, -x), x \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $F \subset E$ mais que $E \not\subset F$.

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère les ensembles $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, 2y - x), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $E = F$.

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère les ensembles $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x - y + 2z = 0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + y - 4z = 0\}$.

Déterminer l'ensemble $E \cap F$.

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit A, B et C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle différence symétrique de A et B, que l'on note $A\Delta B$, l'ensemble défini par $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Déterminer les ensembles $A\Delta A$, $A\Delta\varnothing$, $A\Delta E$ et $A\Delta\overline{A}$.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.
3. Soit C un sous ensemble de E. Montrer que $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique (ou fonction indicatrice) de A la fonction notée $\mathbf{1}_A$ définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.
2. Soit A et B deux sous-ensembles de E. Montrer que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$.

Cardinal d'ensembles

► Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère deux ensembles A et B.

- Si $\text{Card}(A) = 18$, $\text{Card}(B) = 23$, A et B étant disjoints, que vaut $\text{Card}(A \cup B)$?
- Si $\text{Card}(A) = 12$, $\text{Card}(B) = 47$ et $\text{Card}(A \cup B) = 58$, A et B sont-ils disjoints ?
- Si $\text{Card}(A) = 14$ et $\text{Card}(A \cup B) = 27$, quel est le nombre minimal d'éléments dans B ?

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Soit $A = \{5;7\}$ et $B = \{7;9;10\}$. Donner l'ensemble des éléments de $A \times B$, de $B \times A$, de A^3 et de B^2.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit A et B deux ensembles finis tels que $\text{Card}(A \times B) = 299$ et $\text{Card}(A \cup B) = 37$. Les ensembles A et B sont-ils disjoints ?

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Parmi tous les nombres de 1 à 1000, combien s'écrivent avec le chiffre 9 ?

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Dans un restaurant figurent au menu

- 12 entrées : 3 avec viande, 3 avec poisson et 6 végétariennes ;
- 20 plats : 10 avec viande, 6 avec poisson et 4 végétariens.

Un client commande un menu composé d'une entrée et d'un plat.

1. Combien de menus végétariens est-il possible de composer ?
2. Combien de menus sans poisson peut-on composer ?
3. Combien de menus avec une entrée et un plat de nature différente peut-on composer ?

Arrangements et permutations

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère l'ensemble $A = \{s;i;n\}$ Donner toutes les permutations de A. Combien y en a-t-il ?

► Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère l'ensemble $A = \{1;3;7;9;11\}$.

1. Donner deux éléments de A^3. Combien en existe-t-il ?
2. Donner deux 3-arrangements d'éléments de A. Combien en existe-t-il ?
3. Donner deux permutations de A. Combien en existe-t-il ?

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Une course de 8 athlètes a lieu.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de classements complets possibles ?
3. Anne a participé à la course et a terminé sur le podium. Sachant cette information, combien de classements complets sont possibles ?

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Deux groupes d'étudiants se rendent au cinéma. Le premier est composé de 6 personnes et le deuxième de 4 personnes. Les étudiants s'installent sur une rangée de dix places.

1. Combien de configurations différentes existe-t-il ?
2. Les deux groupes ne veulent pas être séparés. Combien de configurations sont possibles ?

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On dispose des lettres de SAINTEX. On souhaite construire de nouveaux mots à l'aide de ces lettres, sans s'intéresser au sens de ces mots. On peut par exemple former les mots EXTIA ou SINETAX.

1. Combien de mots de 4 lettres peut-on former si toutes les lettres peuvent être utilisées autant de fois que l'on veut ?
2. Combien de mots de 4 lettres peut-on former si chaque lettre ne peut être utilisée qu'une seule fois ?
3. Combien de mots de 6 lettres ne commençant pas par la lettre X peut-on former, chaque lettre pouvant être utilisée autant de fois que l'on veut ?
4. Combien de mots de 4 lettres comportant la lettre I existe-t-il, chaque lettre ne pouvant être utilisée qu'une seule fois ?

► Exercice 19 – Voir le corrigé

On considère un questionnaire comportant cinq questions. Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres. Par exemple, le mot BBAAC signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - E : " le candidat a exactement une réponse exacte ".
   - F : " le candidat n'a aucune réponse exacte ".
   - G : " le mot-réponse du candidat est un palindrome ".

Combinaisons d'un ensemble fini

► Exercice 20 – Voir le corrigé

Soit $A = \{1;2;3;4\}$. donner toutes les parties de A à 2 éléments et en déduire la valeur de $\binom{4}{2}$.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

Donner les valeurs de $\binom{6}{3}$, $\binom{10}{7}$, $\binom{14}{11}$, $\binom{9}{4}$, $\binom{9}{5}$ et $\binom{8}{3}$.

► Exercice 22 – Voir le corrigé

Calculer les coefficients binomiaux : $\binom{31}{2}$, $\binom{279}{279}$, $\binom{1457}{0}$, $\binom{4321}{4320}$, $\binom{101}{99}$.

► Exercice 23 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

► Exercice 24 – Voir le corrigé

On considère un jeu de 32 cartes. Chaque carte possède une couleur (Cœur, Pique, trèfle, Carreau) et une valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Une main est un ensemble de 5 cartes tirées dans ce paquet, sans tenir compte de l'ordre des cartes tirées. Déterminer le nombre de mains :

- comportant exactement 3 cœurs ;
- comportant exactement un roi et exactement deux dames ;
- comportant au plus 2 roi.

► Exercice 25 – Voir le corrigé

Parmi tous les nombres entiers entre 1 et 10^9, combien ont une somme de chiffres qui vaut 3 ?

► Exercice 26 – Voir le corrigé

Une assemblée de 30 personnes souhaite élire une délégation de 4 personnes pour les représenter à un congrès.

1. Combien de délégations peut-on ainsi désigner ?
2. Alice et Bob ne se supportent pas. Si l'un d'eux fait partie de la délégation, l'autre refusera d'y participer. Combien de possibilités reste-t-il ?
3. Alice et Bob acceptent finalement de mettre leur différend de côté. Cependant, les inséparables Camille et Dominique imposent que si l'un d'entre eux fait partie de la délégation, alors l'autre doit en être également. Combien de possibilités reste-t-il ?

► Exercice 27 – Voir le corrigé

Outre des baguettes croustillantes et de délicieux croissants, le boulanger vend également d'autres produits. On trouve ainsi 10 sortes de pâtisseries différentes, 4 types de cookies, 12 types de boissons ainsi que 15 sandwichs différents.

1. La vitrine du boulanger n'étant pas assez grande pour accueillir tous les types de sandwichs en même temps, le boulanger doit en choisir 8 qu'il pourra exposer et ainsi mettre en avant. L'ordre dans lequel il place les sandwichs dans la vitrine étant important, combien de choix s'offrent au boulanger pour réaliser sa présentation ?
2. Une formule est composée d'un sandwich, d'une boisson et d'un dessert, ce-dernier pouvant être une pâtisserie ou un cookie. Combien de formules différentes peut-on ainsi constituer ?
3. Un client un peu gourmand souhaite goûter à un échantillon des produits du boulanger. Il compte ainsi commander 3 gâteaux et 2 cookies, tous différents les uns des autres pour varier les plaisirs. Combien de choix s'offrent à lui pour réaliser sa commande ?
4. Face au succès des cookies, notre boulanger-mathématicien décide de lancer un service de cookies personnalisés. Chaque client peut alors choisir une base de cookie (nature ou chocolat) et les ingrédients à mettre dessus. 5 ingrédients sont disponibles et les clients peuvent choisir d'en mettre autant qu'ils veulent sur leur gâteau. Ils peuvent ainsi tout à fait choisir de n'en mettre aucun comme de mettre les 5 en même temps. Combien de recettes de cookies différentes est-il alors possible de créer ?

► Exercice 28 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul et A un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $k \leqslant n$, on note P_k l'ensemble des parties de A ayant k éléments.

1. Rappeler le cardinal de P_k. Que vaut l'union des P_k pour k allant de 0 à n ? Est-elle disjointe ?
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

► Exercice 29 – Voir le corrigé

Dans une assemblée de n personnes, on souhaite élire k personnes dans une commission. L'une de ces k personnes en sera la présidente.

1. Combien de commissions avec son président peut-on ainsi constituer ?
2. On procède différemment : on choisit d'abord le président de la commission puis on choisit les autres membres parmi les personnes restantes. De combien de manières peut-on procéder ?
3. En déduire que $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.
4. Retrouver cette égalité à l'aide de la formule sur les coefficients binomiaux.

► Exercice 30 – Voir le corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse aux mots de taille $2n$ comportant exactement n fois la lettre A et n fois la lettre B.

1. Combien de tels mots peut-on construire ?
2. (a) Combien de tels mots contenant 0 fois la lettre A parmi les n premières lettres peut-on construire ?
   (b) Combien de tels mots contenant 1 fois la lettre A parmi les n premières lettres peut-on construire ?
   (c) Soit $k \geqslant n$. Combien de tels mots contenant k fois la lettre A parmi les n premières lettres peut-on construire ?
3. A l'aide des question précédentes, simplifier l'expression $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Binôme de Newton

► Exercice 31 – Voir le corrigé

Soit x un réel. Développer et réduire $(x-1)^6$ et $(2x+3)^4$.

► Exercice 32 – Voir le corrigé

En utilisant le binôme de Newton, calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \qquad \sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k 2^{k-1} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$$

► Exercice 33 – Voir le corrigé

En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier n, pour tout réel positif x, on a $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ (aussi appelée inégalité de Bernoulli).

► Exercice 34 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul et $P : x \mapsto (x+1)^n - (x-1)^n$.

Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P.

► Exercice 35 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Exprimer $f(x)$ pour tout réel x à l'aide du binôme de Newton.
2. En utilisant la dérivée de f, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

► Exercice 36 – Voir le corrigé

1. Soit n, p et q trois entiers naturels tels que $p \leqslant q \leqslant n$.
   Montrer que $\displaystyle\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-q} = \binom{n}{q}\binom{q}{p}$.
2. En déduire que pour tout $(n,q) \in \mathbb{N}^2$, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{q}\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-q} = 2^q\binom{n}{q}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{q}\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-q}\right) = 3^n$.
4. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{q}\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-q}\right)\right)$.

► Exercice 37 – Voir le corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En développant $(1+x)^{2n}$ de deux manières différentes, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

► Exercice 38 – Voir le corrigé

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

1. Calculer B et B^2.
2. En déduire une expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

► Exercice 39 – Voir le corrigé

Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = D + N$.

1. Calculer N^2.
2. Vérifier que D et N commutent.
3. Calculer T^n pour tout entier naturel n.