

# Continuité

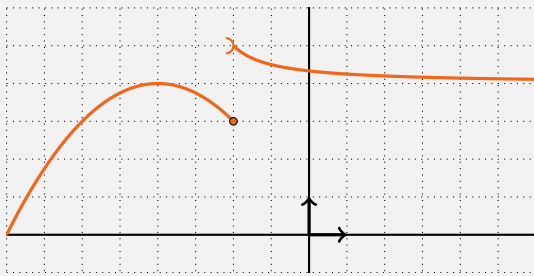
## 1 Continuité d'une fonction réelle

**Définition 1 — Continuité :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Soit  $a \in I$ .

- On dit que  $f$  est *continue* en  $a$  si  $f$  admet une limite en  $a$ , par valeurs supérieures et par valeurs inférieures, et que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .
- On dit que  $f$  est *continue* sur  $I$  si  $f$  est continue en tout réel de  $I$ .

■ **Exemple 1 :** Jusqu'ici, les fonction de référence rencontrées étaient continues sur leur domaine de définition : fonctions polynômes ou quotients de polynômes, exponentielle, racine carrée, valeur absolue...

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction  $f$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est donnée ci-dessous.



On remarque que

- $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 3$  ;
- $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 5$ .

Ces deux valeurs sont différentes, la fonction  $f$  n'est pas continue en 2.

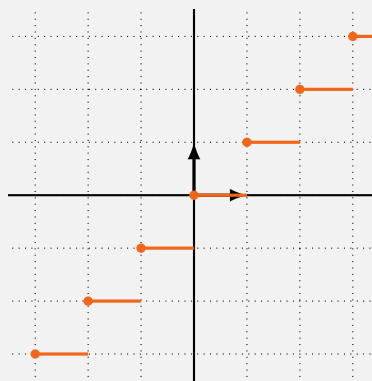
Graphiquement, on voit que la courbe de la fonction fait un "saut" en  $x = -2$ .

**Définition 2 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

- On dit que  $f$  est continue à gauche en  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .
- On dit que  $f$  est continue à droite en  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .

■ **Exemple 3 :** La fonction de l'exemple précédent est continue à gauche en  $-2$ .

■ **Exemple 4 :** La fonction partie entière est continue en tout réel non entier. Elle est seulement continue à droite en tout entier.



**Propriété 1 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle **ouvert**  $I$  et  $a \in I$ . La fonction  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f$  est continue à gauche et à droite en  $a$ .

**Méthode 1 :** Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est/n'est pas continue en un réel  $a$  inclus dans le domaine de définition de la fonction, on étudie les limites à gauche et à droite de  $a$  et on compare ces limites à la valeur de  $f(a)$ .

Si les trois valeurs sont identiques, la fonction est continue en  $a$ .

■ **Exemple 5 :** On considère la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} 2x+9 & \text{si } x < -2 \\ x^2+1 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 4x-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est continue sur les intervalles  $] -\infty; -2[$ ,  $] -2; 3[$  et  $]3; +\infty[$ . Étudions la continuité aux bords de chaque intervalle.

**Continuité en  $-2$**

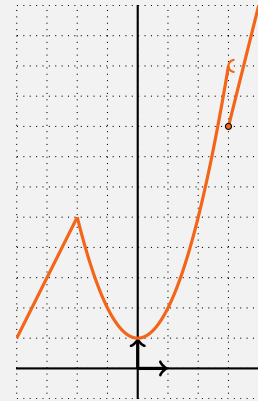
- $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$  ;
- $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 2 \times (-2) + 9 = 5$  ;
- $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = (-2)^2 + 1 = 5$ .

Ainsi,  $f$  est continue en  $-2$ .

**Continuité en  $3$**

- $f(3) = 4 \times 3 - 4 = 8$  ;
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3^2 + 1 = 10$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq f(3)$ . Ainsi,  $f$  n'est pas continue en  $3$ .



**Méthode 2 :** Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est continue sur  $\mathbb{R}$ ...

- On précise que la fonction est continue sur certains intervalles **OUVERTS** ;
- On étudie ensuite la continuité aux bords de chacun de ces intervalles.

■ **Exemple 6 :** On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$  La fonction  $f$  est continue sur les intervalles  $] -\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ .

Par ailleurs, on a

- $f(0) = e^0 - 1 = 0$  ;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 0$  ;
- Enfin,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$  par croissances comparées.

La fonction  $f$  est donc également continue en  $0$ .

Finalement, la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Propriété 2 :** La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle  $I$  sont continus sur  $I$ .  
La composée de deux fonctions continues est continue.

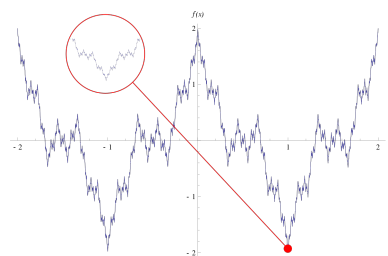
■ **Exemple 7 :** La fonction  $x \mapsto (x^2 + 3\sqrt{x}) \ln(x) - e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Théorème 1 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .  
Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est également continue sur  $I$ .

La réciproque est fautive. La fonction  $x \mapsto |x|$  est continue sur  $\mathbb{R}$  mais n'est pas dérivable en 0.

Il existe par ailleurs des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  qui ne sont dérivables nulle part !

Les exemples les plus connus sont sans doute les fonctions de Weierstrass. Ce sont des courbes fractales : peu importe le niveau de zoom que l'on peut avoir sur la courbe, on verra toujours de nouveaux détails apparaître.



## 2 Prolongement par continuité

**Définition 3 :** Soit  $a$  un réel,  $I$  un intervalle ouvert contenant  $a$  et  $f$  une fonction continue sur  $I \setminus \{a\}$ .

On dit que  $f$  est prolongeable par continuité sur  $I$  lorsqu'il existe une fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $I$  telle que

- $\forall x \in I \setminus \{a\}, \tilde{f}(x) = f(x)$  ;
- $\tilde{f}$  est continue sur  $I$ .

**Théorème 2 :** Soit  $a$  un réel,  $I$  un intervalle ouvert contenant  $a$  et  $f$  une fonction continue sur  $I \setminus \{a\}$ .

$f$  est prolongeable par continuité sur  $I$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ,

La fonction  $\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$  est alors continue l'unique prolongement continu de  $f$  sur  $I$ .

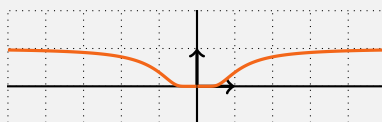
Dans les faits, pas abus de langage, nous ne ferons pas de distinction entre la fonction  $f$  et son prolongement  $\tilde{f}$ .

■ **Exemple 8 :** On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  non nul par  $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $] -\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ . On a de plus  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ .

Par composition de limite, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ . De même, on montre que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ .

Ainsi, la fonction  $f$  est prolongeable par continuité et 0 en posant  $f(0) = 0$ .



## 3 Théorème sur les fonctions continues

### 3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

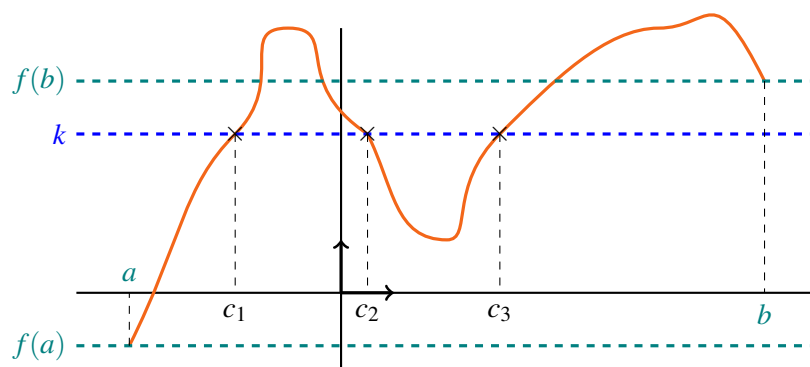
**Théorème 3 — Théorème des valeurs intermédiaires :** Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $[a; b]$  et  $k$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

Alors **il existe** (au moins) un réel  $c$  dans  $[a; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

Autrement dit, l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solutions dans l'intervalle  $[a, b]$ .

**Démonstration 4 :** En exercice, en utilisant des suites adjacentes. □

**Illustration :** On représente une fonction  $f$  ci-dessous.



Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ ,  $k$  possède au moins un antécédent par  $f$ . Dans cet exemple, il y en a trois. Le nom de ce théorème se justifie ainsi : une fonction continue qui passe d'une valeur  $f(a)$  à une valeur  $f(b)$  passe forcément au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires.



**Méthode 3 :** Le théorème des valeurs intermédiaires nous informe donc de l'existence de solutions à certaines équations sur un intervalle.

Il est important de reprendre l'ensemble des hypothèses de ce théorème !

■ **Exemple 9 :** On considère la fonction  $f : x \mapsto x^3 - 3x - 1$ , définie sur  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $f$  est une fonction polynômiale, elle est donc continue sur  $\mathbb{R}$  (et donc sur  $[-2; 2]$  en particulier).
- De plus,  $f(-2) = -1$  et  $f(2) = 3$ .
- Or,  $0 \in [-1; 3]$ .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel  $c \in [-2; 2]$  tel que  $f(c) = 0$ .

Ce théorème ne nous donne aucune indication sur le nombre de ces solutions (en réalité, il y en a 3 sur cet intervalle). Nous verrons dans très peu de temps comment pallier ce problème.

Il est également possible d'utiliser les limites dans le théorème des valeurs intermédiaires.

**Théorème 5 — Théorème des valeurs intermédiaires :** Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $]a; b[$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a^+}$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  existent. Soit  $k$  un réel strictement compris entre ces deux limites.

Alors **il existe** (au moins) un réel  $c$  dans  $]a; b[$  tel que  $f(c) = k$ .

■ **Exemple 10 :** Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels avec  $a > 0$ . On considère la fonction  $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ , définie sur  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $f$  est polynomiale, elle est donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel non nul,  $f(x) = x^3 \left( a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} \right)$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} \right) = a > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ .

- Ainsi, par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . De même, on montre que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- Or,  $0 \in ]-\infty; +\infty[$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $x$  tel que  $f(x) = 0$ .

Le même raisonnement vaut pour  $a < 0$  : nous venons de démontrer que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Le théorème des valeurs intermédiaires peut également se formuler de la manière suivante.

**Théorème 6 — Théorème des valeurs intermédiaires :** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle  $I$ . Alors  $f(I)$  est un intervalle.

■ **Exemple 11 :** Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ , définie sur  $\mathbb{R}_*$ . La fonction  $f$  est continue sur son ensemble de définition, toute image d'intervalle contenue dans  $\mathbb{R}^*$  par cette fonction est donc un intervalle.

On a par exemple  $f([1; 2]) = \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$ ,  $f(]0; 1]) = [1; +\infty[$ .

On remarque par ailleurs que l'image d'un intervalle par une fonction continue n'est pas forcément un intervalle de même nature... sauf dans le cas suivant.

### 3.2 Théorème des bornes atteintes

**Définition 4 :** Un segment de  $\mathbb{R}$  est un intervalle fermé et borné.

**Théorème 7 — Théorème des bornes atteintes :** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles, continue sur un segment  $I = [a, b]$ .

Alors  $f(I)$  est un segment. Autrement dit,  $f$  est bornée sur  $I$  et atteint ses bornes.

Attention, les extrémités du segment image ne sont pas forcément les images des extrémités du segment de départ.

C'est en revanche vrai pour une fonction monotone. Ainsi,

- Si  $f$  est une fonction continue et croissante sur  $[a; b]$ , alors  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$  ;
- Si  $f$  est une fonction continue et décroissante sur  $[a; b]$ , alors  $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ .

### 3.3 Théorème de la bijection

**Théorème 8 — Théorème de la bijection :** Soit  $f$  une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle  $I$ .

Alors  $f$  est bijective de  $I$  dans  $f(I)$ . Autrement dit, pour tout réel  $y \in f(I)$ , il existe un unique réel  $x \in I$  tel que  $y = f(x)$ .

Par ailleurs, la bijection réciproque  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  est continue et strictement monotone, de même monotonie que  $f$ .

Là encore, il est possible d'utiliser les limites de  $f$  en  $a$  et en  $b$  si elles existent.

**Démonstration 9 :** Soit  $f$  une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle  $I$ .

1. Montrons que  $f$  est bijective de  $I$  dans  $f(I)$ .

- D'une part, par définition de  $f(I)$ ,  $f$  est déjà surjective de  $I$  dans  $f(I)$ .
- Montrons que  $f$  est bijective. Soient  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $I$ , tels que  $x \neq x'$ . On peut alors supposer que  $x < x'$  (sinon, on inverse le rôle de ces deux réels).  
Puisque  $f$  est strictement monotone sur  $I$ , on a alors soit  $f(x) < f(x')$ , soit  $f(x) > f(x')$ . Dans les deux cas, on a  $f(x) \neq f(x')$ .  $f$  est donc injective.

La fonction  $f$  est donc bijective de  $I$  dans  $f(I)$ .

2. Montrons que  $f^{-1}$  est strictement monotone, de même monotonie que  $f$ . Supposons que  $f$  est strictement croissante (la démonstration si  $f$  est strictement décroissante est analogue).

Soit  $y$  et  $y'$  deux éléments de  $f(I)$  tels que  $y < y'$ . Puisque  $f$  est bijective de  $I$  dans  $f(I)$ , il existe donc deux uniques réels  $x$  et  $x'$  tels que  $y = f(x)$  et  $y' = f(x')$ . Puisque  $y$  et  $y'$  sont distincts,  $x$  et  $x'$  le sont également.

Ainsi,  $f(x) < f(x')$ . Or,  $f$  est strictement croissante sur  $I$ , il en vient que  $x \leq x'$  (on utilise la contraposition de la définition d'une fonction strictement croissante). Ces deux éléments étant distincts, on a donc  $x < x'$ , c'est-à-dire  $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$ .

La fonction  $f^{-1}$  est donc strictement croissante sur  $f(I)$ .

3. Montrons que  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$ .

Soit  $y_0 \in f(I)$ . On suppose que  $y_0$  n'est pas l'extrémité droite de  $f(I)$ . Puisque  $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $f(I)$ , d'après le théorème de limite monotone,  $f^{-1}$  admet une limite à droite en  $y_0$ .

Notons alors  $\ell_+ = \lim_{y \rightarrow y_0^+} f^{-1}(y)$ . On a alors  $\ell_+ \in I$ . L'objectif est de montrer que  $\ell = f^{-1}(y_0)$ .

Puisque la fonction  $f$  est continue sur  $I$ , et en particulier continue en  $\ell_+$ , on a  $\lim_{x \rightarrow \ell_+} f(x) = f(\ell_+)$ .

Or, par composition de limites, on a également  $f(\ell_+) = \lim_{y \rightarrow y_0^+} f(f^{-1}(y))$  et donc  $f(\ell_+) = \lim_{y \rightarrow y_0^+} y$ . On a donc  $f(\ell_+) = y_0$  et donc  $\ell_+ = f^{-1}(y_0)$ . La fonction  $f^{-1}$  est donc continue à droite sur  $f(I)$ .

On montre de la même manière que  $f^{-1}$  est continue à gauche sur  $f(I)$ .

La fonction  $f^{-1}$  est donc continue sur  $f(I)$ .



**Méthode 4 :** Pour montrer qu'une équation  $f(x) = k$  admet une unique solution sur un intervalle  $I$ , on peut utiliser le théorème de la bijection.

- On précise que la fonction  $f$  est continue ;
- On vérifie, en déterminant les variations de  $f$  sur  $I$ , que  $f$  est strictement monotone ;
- On applique le théorème de la bijection :  $f$  est bijective de  $I$  dans  $f(I)$  (à déterminer) ;
- Si  $k \in f(I)$ , alors l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution sur  $I$ .

□

■ **Exemple 12 :** On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^{x-1}}{x}$ , définie sur  $I = ]0; +\infty[$ .

Montrons que l'équation  $f(x) = 2$  possède exactement deux solutions sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

D'une part, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x} = \frac{1}{e} \times \frac{e^x}{x}$ .

Or, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = e^{-1} > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ . Par quotient,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .

La fonction  $f$  est un quotient de fonctions dérivables sur  $I$  et son dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi,  $f$  est également dérivable sur  $I$  et, pour tout réel  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{e^{x-1} \times x - e^{x-1} \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}.$$

Or, pour tout réel  $x > 0$ ,  $e^{x-1} > 0$  et  $x^2 > 0$ .  $f'(x)$  est donc du signe de  $x - 1$ . Ceci nous permet d'établir le tableau de signes de  $f'$  et le tableau de variations de  $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f$	$+\infty$		$+\infty$

On raisonne alors selon les intervalles sur lesquels  $f$  est strictement monotone.

- La fonction  $f$  est continue sur  $]0; 1]$  ;
- La fonction  $f$  est strictement monotone sur  $]0; 1]$ .

D'après le théorème de la bijection,  $f$  est bijective de  $]0; 1]$  dans  $f(]0; 1]) = [1; +\infty[$ . Or,  $2 \in [1; +\infty[$ . Ainsi, l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution sur l'intervalle  $]0; 1]$ .

De même, l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

Puisque  $f(1) = 1 \neq 2$ , les deux solutions précédemment trouvées sont bien différentes. L'équation  $f(x) = 2$  admet exactement deux solutions sur  $]0; +\infty[$ .

## 4 Algorithme de dichotomie

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence de solutions à une certaine équation. En revanche, il ne nous indique en rien la valeur de cette solution. Plusieurs algorithmes nous permettent néanmoins d'obtenir au moins une valeur approchée d'une solution de l'équation qui nous intéresse.

Considérons une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $[a; b]$  et  $k$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Dans cet exemple, on supposera par exemple que  $f(a) \leq k \leq f(b)$ . Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence d'un réel  $c$  dans l'intervalle  $[a; b]$  tel que  $f(c) = k$ . L'idée, pour obtenir une valeur approchée d'un tel réel, est d'évaluer la valeur prise par la fonction au milieu de l'intervalle  $[a; b]$

- Si  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < k$ , on a alors  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq k \leq f(b)$ . Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors de l'existence d'une solution à l'équation  $f(x) = k$  sur l'intervalle  $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$  ;
- Si  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > k$ , on a alors  $f(a) \leq k \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ . Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors de l'existence d'une solution à l'équation  $f(x) = k$  sur l'intervalle  $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ .

Dans les deux cas, nous avons trouvé un intervalle deux fois plus petit que l'intervalle  $[a; b]$  dans lequel l'équation  $f(x) = k$  possède une solution.

■ **Exemple 13** : On considère la fonction  $f : x \mapsto 3x - e^x$ .  $f$  est continue,  $f(0) = -1$  et  $f(1) = 3 - e > 0$ . Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $c \in [0; 1]$  tel que  $f(c) = 0$ .

On calcule alors  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  : on a  $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0.15 < 0$ . Ainsi, il existe un réel  $c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$  tel que  $f(c) = 0$

En répétant le même procédé sur le nouvel intervalle obtenu, on obtiendra alors un intervalle 4 fois plus petit que celui de l'intervalle de départ, puis 8 fois plus petit, 16 fois, 32 fois et ainsi de suite.

On définit en réalité deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de la manière suivante

- $a_0 = a$  et  $b_0 = b$  ;
- Si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k$ , on pose alors  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$  ;
- Sinon, on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , il existe une solution à l'équation  $f(x) = 0$  dans l'intervalle  $[a_n; b_n]$ .

De plus, puisque  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ , la longueur de l'intervalle  $[a_n; b_n]$  tend vers zéro : il est donc possible d'avoir une valeur approchée aussi précise que l'on veut à l'aide de cet algorithme. Cet algorithme peut alors être implémenté en Python

```

1 def dichotomie(a, b, k, f, p) :
2     # f est une fonction continue sur [a;b]
3     # k est un reel tel que f(a) <= k <= f(b)
4     # p designe la precision voulue pour l estimation de la solution
5     while b - a >= p :
6         m = (a + b) / 2
7         if f(m) <= k :
8             a = m
9         else :
10            b = m
11    return a

```

Dans le cas où  $f(a) \geq k \geq f(b)$ , il suffit de changer le sens des inégalités.

## 5 Suites et fonction continue

### 5.1 Théorèmes de convergence d'une suite

**Propriété 3 — Image d'une suite convergente :** Soit  $I$  un intervalle et  $(u_n)$  une suite telle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in I$ . Soit  $g$  une fonction définie sur l'intervalle  $I$ .

Si la suite  $(u_n)$  est convergente avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in I$  et si  $g$  est **continue** en  $\ell$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell)$

En d'autres termes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)$ .

**Démonstration 10 :** Il s'agit simplement d'un cas particulier du théorème que nous avons vu lors du chapitre sur les limites de fonction.  $\square$

■ **Exemple 14 :** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $u_n = \sqrt{9 + \frac{1}{n}}$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(9 + \frac{1}{n}\right) = 9$ .

Or, la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue en 9. Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{9} = 3$ .

**Théorème 11 — Théorème du point fixe :** Soit  $I$  un intervalle,  $g$  une fonction définie et **continue** sur  $I$  et  $(u_n)$  une suite telle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in I$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

On suppose que la suite  $(u_n)$  est convergente, de limite  $\ell \in I$ . Alors  $g(\ell) = \ell$ .

**Démonstration 12 :** Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} = g(u_n)$ . La suite  $(u_n)$  étant convergente, il est possible de passer à la limite dans cette égalité.

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$ . Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$  et, la fonction  $g$  étant continue sur  $I$ , on a d'après la propriété précédente que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = g(\ell)$ . Ainsi,  $g(\ell) = \ell$ .  $\square$

■ **Exemple 15 :** On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la proposition  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  et  $u_{n+1}$  existent,  $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$  ».

- **Initialisation :** On a  $u_0 = 2$  et  $u_1 = \sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10}$ . On a bien  $2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$ .  $\mathcal{P}(0)$  est donc vraie.
- **Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. On a donc  $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ . La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{3x + 4}$  est définie sur  $[2; 4]$ , il est donc possible de calculer  $f(u_n)$  et  $f(u_{n+1})$ . Ainsi,  $u_{n+1}$  et  $u_{n+2}$  existent. De plus,  $f$  est croissante sur  $[2; 4]$ . Ainsi,

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4),$$

c'est-à-dire,

$$\sqrt{10} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4.$$

Puisque  $2 \leq \sqrt{10}$ , on a donc bien  $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$ .  $\mathcal{P}(n+1)$  est donc vraie.

- **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que  $(u_n)$  est bien définie, croissante et bornée par 2 et 4.

Puisque la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée, la suite  $(u_n)$  converge. Notons  $\ell$  sa limite. On a alors  $\ell \in [2; 4]$ .

Puisque la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{3x + 4}$  est **continue** sur  $[2; 4]$  on a alors  $f(\ell) = \ell$ .

Ainsi,  $\sqrt{3\ell+4} = \ell$ . En élevant cette inégalité au carré, on a  $3\ell+4 = \ell^2$ , soit  $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$ . Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont  $-1$  (ce qui ne correspond pas à  $\ell \in [2;4]$ ) et  $4$ .

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ .

## 5.2 Suites implicites

**Définition 5 :** Une suite implicite et une suite définie par une certaine équation qui dépend d'un entier  $n$ .

■ **Exemple 16 :** On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{1 - \ln(x)}{x}$ , définie sur  $]0; +\infty[$ .

Montrons que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet une unique solution sur  $[1; e]$ . On notera cette solution  $\alpha_n$ .

D'une part, par quotient de limites, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

La fonction  $f$  est un quotient de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout réel  $x > 0$ , on a

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x - (1 - \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{\ln(x) - 2}{x^2}.$$

Pour tout réel  $x > 0$ ,  $f'(x)$  est donc du signe de  $\ln(x) - 2$ . Or, si  $x > 0$ , alors

$$\ln(x) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq e^2.$$

On construit alors le tableau de signes de  $f'$  et le tableau de variations de  $f$ .

$x$	$0$	$e^2$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f$	$+\infty$	$-\frac{1}{e^2}$	$0$

L'intervalle  $[1; e]$  est inclus dans l'intervalle  $[0; e^2]$ .

Ainsi,

- La fonction  $f$  est continue sur  $[1; e]$ .
- La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $[1; e]$ .

D'après le théorème de la bijection, la fonction  $f$  est bijective de  $[1; e]$  dans  $f([1; e]) = [f(e); f(1)] = [0; 1]$ .

Or, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $\frac{1}{n} \in [0; 1]$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet une unique solution sur  $[1; e]$ .

La suite  $(\alpha_n)$  de l'exemple précédent est une suite définie implicitement : il est impossible d'exprimer clairement ce que vaut son terme de rang  $n$ .

Pour obtenir des informations sur la suite  $(\alpha_n)$ , il est alors possible d'utiliser le lien entre la fonction  $f$  étudiée ci-dessus et sa « réciproque » (il faut ici restreindre le domaine d'études puisque  $f$  n'est pas bijective sur tout son domaine de définition).

■ **Exemple 17** : Reprenons les données de l'exemple précédent.

Nous avons vu que l'application  $g : \begin{cases} [1; e] & \longrightarrow & [0; 1] \\ x & \longmapsto & \frac{1 - \ln(x)}{x} \end{cases}$  est bijective. Cette application est par ailleurs strictement décroissante.

On définit alors sa réciproque  $g^{-1} : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow & [1; e] \\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution de } g(x) = y \text{ sur } [1; e] \end{cases}$ .

D'après le théorème de la bijection,  $g^{-1}$  est continue et strictement décroissante sur  $[0; 1]$ .

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a alors  $\alpha_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ . Or, si  $n > 0$ , on a alors  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$  et, par décroissance de la fonction  $g^{-1}$  sur  $[0; 1]$ , on a alors  $g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ , c'est-à-dire  $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ .

La suite  $(\alpha_n)$  est donc croissante.

La suite  $(\alpha_n)$  est donc croissante et majorée par  $e$ , elle converge donc vers un réel  $\ell \in [1; e]$ .

Rappelons alors que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\alpha_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ . On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Puisque  $g^{-1}$  est continue sur  $[0; 1]$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = g^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}\right) = g^{-1}(0) = e$ .

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e$ .

**Remarque** : par abus de langage, nous conserverons parfois la même lettre pour désigner l'application de départ  $f$  et sa restriction  $g$ .