

Exercices : Continuité

Continuité d'une fonction

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 6x+8 & \text{si } x \leq -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. f est-elle continue en -1 ? et en 2 ?

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur \mathbb{R} . La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

► Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en -1 .

► Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-1; 3[\cup]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 3 .

Théorème des valeurs intermédiaires

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1; 2]$.

On rappelle que l'on a $2 < e < 3$.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère l'application $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f . On le note \mathcal{D}_f .
2. Construire le tableau de variations de f , en y incluant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que f est bijective de $]0; 1[$ dans un intervalle à préciser.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions sur \mathcal{D}_f .

► Exercice 7 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$, définie sur \mathbb{R} .

Justifier que la fonction f définit une bijection de $[-1; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
2. Construire le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$. On précisera les limites en 0 et en $+\infty$.
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ en fonction de la valeur de m .

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Soit f et g les fonction définies pour tout réel x par $f(x) = (1-x)e^x + 1$ et $g(x) = \frac{x}{e^x + 1}$.

1. Construire le tableau de variations de f en y incluant les limites.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} . On note α ce réel.
3. Montrer que pour tout réel x , $g'(x) = \frac{f(x)}{(1+e^x)^2}$.
4. Construire le tableau de variations de g .

► Exercice 10 – Voir le corrigé

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}$.

On notera C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'équation de T , la tangente à C_g au point d'abscisse 0.

On souhaite désormais déterminer s'il existe des tangentes à la courbe C_g qui soient parallèles à T .

2. Justifier que les solutions de ce problème correspondent aux solutions de l'équation $g'(x) = 3$.
3. Construire le tableau de variations de g' . On inclura dans ce tableau les limites en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que les valeurs des extremums de la fonction g' .
4. Montrer que l'équation $g'(x) = 3$ possède exactement deux solutions sur \mathbb{R} et conclure.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que, pour tout réel $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \in [0, 1]$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Suites et fonction continue

► Exercice 12 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{3}{u_n + 1} + 3$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.
2. Étudier le sens de variations de la suite (u_n) .
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer la limite de la suite (u_n) .

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 9x - 3$.

1. Construire le tableau de variations de la fonction f . On y inclura les limites et extremums de f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution réelle. On note α cette solution.

On considère désormais la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \frac{12x^2 - 8x + 3}{1 + 4x^2}$.

3. Construire le tableau de variations de la fonction g .

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. Que peut-on en déduire ?
5. Montrer que pour tout réel x , $g(x) - x = -\frac{f(x)}{1+4x^2}$ où f est la fonction définie plus tôt.
6. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

► Exercice 14 – EM Lyon 2023 – Voir le corrigé

Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. (a) Construire le tableau de variations de la fonction f , en incluant les limites.
(b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.
2. (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```

1 import numpy as np
2 def fonc_1(a):
3     u = 1
4     n = 0
5     while -----:
6         u = np.exp(-u)/u
7         n = -----
8     return n

```

- (b) On considère maintenant la fonction Python :

```

1 def fonc_2(a):
2     u = 1
3     n = 0
4     while u > a:
5         u = np.exp(-u)/u
6         n = n+1
7     return n

```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ? Commenter ce résultat en une ligne.

- (c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .
3. Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose $g(x) = e^{-x} - x^2$.
 - (a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty; 1]$.
 - (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$, que l'on notera α .
 - (c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \approx 2,7$.
4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
(b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
 - (a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
 - (b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $]0; +\infty[$.
 - (c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question 3b.
 - (d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Suites implicites

► Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{x-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Construire le tableau de variations de f .
3. Justifier que la fonction f définit une bijection de $] -\infty, 1]$ dans un intervalle J à préciser.
4. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n , l'équation $f(x) = -n$ admet une unique solution dans $] -\infty, 1[$. On note u_n cette solution.
5. Déterminer les variations et la limite de (u_n) .

► Exercice 16 – EDHEC 1997 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f_n(x) = x - n \ln(x)$.

1. Construire le tableau de variations de f_n sur \mathbb{R}_+^* .
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur \mathbb{R}_+^* . En notant u_n la plus petite et v_n la plus grande, vérifier que $0 < u_n < n < v_n$.
3. Quelle est la limite de la suite (v_n) ?
4. Montrer que $1 < u_n < e$.
5. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) .
6. Montrer que la suite (u_n) est convergente puis, en encadrant $\ln(u_n)$, déterminer sa limite.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^{n+1} + x^n - 1$ sur \mathbb{R} .

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; 1[$. On note u_n cette solution.
2. Déterminer u_1 .
3. Recopier et compléter les lignes du programme suivant afin que l'exécution de la commande `u(n)` renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-5} près.

```

1 def f(n, x) :
2     y = ...
3     return y
4
5 def u(n) :
6     a = ...
7     b = ...
8     while abs(a - b) < 10**(-5) :
9         m = ...
10        if f(n, m) == 0 :
11            return ...
12        elif f(n, m) < 0 :
13            a = ...
14        else :
15            b = ...
16        return ...

```

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
5. Déterminer la monotonie de (u_n) et en déduire sa convergence vers un réel $\ell \in [u_1; 1]$.
6. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.