

# Probabilités sur un univers fini

## 1 Vocabulaire

### 1.1 Expérience aléatoire

**Définition 1 :** Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.

- Une **issue** est un résultat envisageable de cette expérience aléatoire.  
On les note en général avec la lettre  $\omega$  ;
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers**  
L'univers est en général noté  $\Omega$  ;
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.  
On les note souvent avec des lettres majuscules  $A, B, C...$
- Un événement est dit **élémentaire** lorsqu'il ne contient qu'une seule issue.
- On dit qu'une issue  $\omega$  **réalise** un événement  $A$  si  $\omega \in A$ .

**EXTRÊMEMENT IMPORTANT : Événement = Ensemble !**

■ **Exemple 1 :** On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on regarde le numéro de la face du dessus.

- L'univers de cet expérience aléatoire est  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ .
- L'ensemble  $\{2; 4; 6\}$  est inclus dans  $\Omega$ , c'est donc un événement. Il peut se traduire par « obtenir un nombre pair ».  
L'issue 2 réalise donc cet événement.
- L'événement  $\{5\}$  est un événement élémentaire.
- On a  $\text{Card}(\Omega) = 6$ . Ainsi,  $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^6 = 64$ . Il y a donc 64 événements différents.

■ **Exemple 2 :** On lance deux fois de suite une même pièce de monnaie et on observe le couple de résultats obtenus, en notant  $P$  lorsque la pièce tombe sur PILE et  $F$  lorsque la pièce tombe sur FACE.

- L'univers de cette expérience aléatoire est  $\Omega = \{(P; P), (P; F), (F; P), (F; F)\}$ .
- Puisque  $\text{Card}(\Omega) = 4$ , il en vient que  $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^4 = 16$ . Il y a donc 16 événements.
- L'événement « la pièce tombe deux fois du même côté » est l'ensemble  $\{(P; P), (F; F)\}$ .
- L'événement « la pièce est tombée au moins une fois sur PILE » est l'ensemble  $\{(P; P), (P; F), (F; P)\}$ .

### 1.2 Opérations sur les événements

**Définition 2 :** Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience aléatoire,  $A$  et  $B$  deux événements.

- L'**événement contraire** de  $A$  est l'événement qui correspond à toutes les issues de  $\Omega$  qui ne sont pas dans  $A$ . On le note  $\bar{A}$ .

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$

- L'événement  $A \cup B$  (A union B) est l'événement composé des issues qui réalisent **au moins** A ou B.

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid (\omega \in A \text{ OU } \omega \in B)\}$$

Si  $A \cap B = \emptyset$ , on dira que les événements A et B sont **incompatibles**.

- L'événement  $A \cap B$  (A inter B) est l'événement composé des issues qui réalisent **à la fois** A ou B.

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid (\omega \in A \text{ ET } \omega \in B)\}$$

■ **Exemple 3** : On lance deux dés tétraédriques à 4 faces, numérotées de 1 à 4 et on note le couple formé par les numéros des faces du dessous.

L'univers de cette expérience aléatoire est  $\llbracket 1; 4 \rrbracket^2$ , c'est-à-dire

$$\Omega = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4)\}.$$

On considère les événements suivants :

- A : « le premier nombre est inférieur ou égal au deuxième » ;
- B : « la somme des deux nombres obtenus est paire ».

On a alors

- $A = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3), (2;4), (3;3), (3;4), (4;4)\}$  ;
- $B = \{(1;1), (1;3), (2;2), (2;4), (3;1), (3;3), (4;2), (4;4)\}$ .

Ainsi, on a

- $\bar{A} = \{(2;1), (3;1), (3;2), (4;1), (4;2), (4;3), \}$  ;
- $\bar{B} = \{(1;2), (1;4), (2;1), (2;3), (3;2), (3;4), (4;1), (4;3)\}$  ;
- $\bar{A} \cap \bar{B} = \{(2;1), (3;2), (4;1), (4;3)\}$  ,
- $A \cap B = \{(1;1), (1;3), (2;2), (2;4), (3;3), (4;4)\}$  ;
- $A \cup B = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3), (2;4), (3;1), (3;3), (3;4), (4;2), (4;4)\}$  ;
- $\bar{A} \cup \bar{B} = \{(2;1), (3;2), (4;1), (4;3)\}$ .

L'événement  $\bar{A}$  peut se traduire par « le premier nombre est strictement supérieur au deuxième ».

Puisque des événements sont des ensembles, nous retrouvons tout ce qui a été fait dans le chapitre dédié à ces ensembles. Nous pouvons en particulier étendre l'intersection et l'union à une famille d'événements.

**Définition 3** : Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements d'un univers  $\Omega$ .

- L'union de tous les  $A_i$  est l'événement noté  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  qui contient toutes les issues qui réalisent au moins l'un des événements  $A_i$ .

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in E \mid \exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x \in A_i\}$$

- L'intersection de tous les  $A_i$  est l'événement noté  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  qui contient toutes les issues qui réalisent tous les événements  $A_i$ .

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in E \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x \in A_i\}$$

■ **Exemple 4** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On lance  $n$  fois une pièce de monnaie et l'on regarde à chaque fois de quel côté cette pièce tombe, formant ainsi un  $n$ -uplet de l'ensemble  $\{P, F\}$ . On a donc  $\Omega = \{P, F\}^n$ .

Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On note  $P_k$  l'événement « le résultat du lancer  $k$  est PILE ». On a alors :

- L'événement « n'obtenir que des PILE » peut s'écrire  $\bigcap_{k=1}^n P_k$  ;
- L'événement « n'obtenir aucun PILE » peut s'écrire  $\bigcap_{k=1}^n \overline{P_k}$  ;
- L'événement « obtenir au moins un PILE » peut s'écrire  $\bigcup_{k=1}^n P_k$ .
- L'événement « obtenir PILE pour la première fois au  $j$ -ième lancer » peut s'écrire  $\left( \bigcap_{k=1}^{j-1} \overline{P_k} \right) \cap P_j$ .

On rappelle les propriétés rencontrés dans le chapitre sur les ensembles qui restent vraies pour les événements.

**Propriété 1** : Soit  $A, B$  et  $C$  trois événements d'un univers  $\Omega$ . On a alors

$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Théorème 1 — Lois de De Morgan** : Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers  $\Omega$ . On a

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

### 1.3 Système complet d'événements

**Définition 4** :

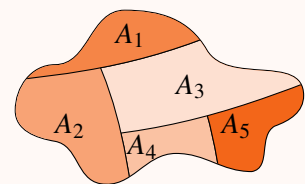
Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience aléatoire et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements.

On dit que les ensembles  $A_1, \dots, A_n$  forment un **système complet d'événements** de  $\Omega$  si :

- Ces événements sont tous non vides ;
- Ces événements sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset).$$

- Leur union forme l'univers entier :  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ .



■ **Exemple 5** : Si  $A$  est un événement d'une expérience aléatoire, alors  $(A, \overline{A})$  est un système complet d'événements. On a en effet  $A \cap \overline{A} = \emptyset$  et  $A \cup \overline{A} = \Omega$ .

■ **Exemple 6** : Soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_n\}$  l'univers d'une expérience aléatoire.

Les événements élémentaires  $(\{\omega_i\})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  forment un système complet d'événements.

Jusqu'à présent, aucune mention des probabilités n'a été faite : le travail sur les événements est fondamental pour aborder toute réflexion probabiliste.

## 2 Probabilité sur un univers fini

Dans cette partie et les suivantes, on considère une expérience aléatoire dont l'univers  $\Omega$  est fini.

### 2.1 Probabilité sur un univers fini

**Définition 5 :** Soit  $\Omega$  l'univers fini d'une expérience aléatoire.

Une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  est une application  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$  vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  ;
- pour tous événements incompatibles  $A$  et  $B$ , on a  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

Le triple  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  est alors appelé **espace probabilisé fini**.

**Propriété 2 :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini, soit  $n$  un entier naturel non nul.

Si  $A_1, \dots, A_n$  sont des événements deux à deux incompatibles, alors  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$  ;

En particulier, si  $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  alors  $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_k\})$ .

La probabilité d'un événement est donc égal à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

**Démonstration 2 :** Il suffit de raisonner par récurrence. □

Ainsi, pour définir une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ , il suffit de définir la probabilité de chaque événement élémentaire.

■ **Exemple 7 :** On lance un dé cubique truqué à six faces, numérotées de 1 à 6. On suppose que les probabilités pour chaque face sont données par le tableau ci-dessous.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On note  $A$  l'événement « obtenir un nombre pair ». On a  $A = \{2; 4; 6\}$ . Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2; 4; 6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

**Propriété 3 :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  un système complet d'événements.

Alors  $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$ .

**Démonstration 3 :** Puisque les  $A_i$  sont deux à deux disjoints, on a

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

□

On retiendra notamment le cas particulier suivant

**Propriété 4 :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini. Alors pour tout événement  $A$ , on a

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

**Démonstration 4 :** Il suffit de remarquer que  $(A; \bar{A})$  est un système complet d'événements.  $\square$

**Propriété 5 :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini, soient  $A$  et  $B$  deux événements. Alors,

- Si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  ;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$  ;
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

## 2.2 Équiprobabilité

**Définition 6 :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires de  $\mathcal{P}(\Omega)$  ont même probabilité.

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\omega')$$

La loi de probabilité  $\mathbb{P}$  est alors appelée **loi uniforme** sur  $\Omega$ .

**Propriété 6 :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini. On suppose que l'on se trouve en situation d'équiprobabilité.

Pour toute issue  $\omega \in \Omega$ , on a alors  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ .

Ainsi, pour tout événement  $A$ , on a  $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ .

**Démonstration 5 :** Notons  $n$  le cardinal de  $\Omega$  et  $\omega_1, \dots, \omega_n$  les issues de l'expérience aléatoire considérée. La famille  $(\{\omega_i\})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est un système complet d'événements.

On a donc  $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1$ . Or, toutes ces probabilités sont égales. On a donc  $n \times \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 1$  et donc  $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{n}$ . Il en est de même pour les autres événements élémentaires.

Si l'on considère maintenant un événement  $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ , on a alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^p \mathbb{P}(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{n} = \frac{p}{n} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

$\square$

■ **Exemple 8 :** On lance un dé équilibré à 12 faces, numérotées de 1 à 12, et on regarde le numéro obtenu.

L'univers de cette expérience aléatoire est  $\Omega = \llbracket 1; 12 \rrbracket$ . La loi de probabilité modélisant cette expérience aléatoire est la loi uniforme sur  $\Omega$ .

On considère l'événement  $A$  : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 9 ». On a alors  $A = \{9; 10; 11; 12\}$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .

■ **Exemple 9 :** On lance à trois reprises un dé équilibré à 10 faces, numérotées de 1 à 6, et on forme un nombre à trois chiffres à l'aide des numéros obtenus à chaque lancer.

L'univers de cette expérience aléatoire est  $\llbracket 1; 6 \rrbracket$  et la loi de probabilité associée est la loi uniforme sur  $\Omega$ . En particulier, on a  $\text{Card}(\Omega) = 6^3$ .

On considère les événements suivants :

- $A$  : « le nombre obtenu comporte trois chiffres différents » ;
- $B$  : « le nombre obtenu est composé de trois chiffres identiques » ;
- $C$  : « le nombre obtenu comporte deux chiffres identiques et un troisième chiffre différent des autres ».

$A$  est donc l'ensemble des 3-arrangements de  $\Omega$ . Il y en a  $6 \times 5 \times 4$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{5}{9}$ .

On a  $B = \{(1; 1; 1), (2; 2; 2), (3; 3; 3), (4; 4; 4), (5; 5; 5), (6; 6; 6)\}$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$ .

Enfin, les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  forment un système complet d'événements. Ainsi,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$ . Il en vient que

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{5}{9} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

## 3 Probabilités conditionnelles

### 3.1 Notion de probabilité conditionnelle

**Propriété 7 :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $A$  un événement telle que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ .

L'application  $\mathbb{P}_A$  : 
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0; 1] \\ B \longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array} \right.$$
 est une probabilité.

**Démonstration 6 :** Vérifions que cette application vérifie bien la définition d'une probabilité.

D'abord,  $A \cap \Omega = A$ . Ainsi,  $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$ .

Soit  $B$  et  $C$  des événements disjoints. On a alors  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . De plus, les événements  $A \cap B$  et  $A \cap C$  sont disjoints (sinon, il y aurait un élément commun à  $B$  et  $C$ ). Ainsi,

$$\mathbb{P}_A(B \cup C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))}{\mathbb{P}(A)} \stackrel{\text{disjoints}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C).$$

□

**Définition 7 :** Soit  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ . On appelle probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$ , la quantité

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

■ **Exemple 10 :** On considère l'univers  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . On tire un nombre uniformément au hasard sur  $\Omega$ . On considère les événements

- $A$  : « le nombre est pair » ;
- $B$  : « le nombre est supérieur ou égal à 3 ».

Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, on a alors  $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

Par ailleurs,  $A \cap B = \{4; 6\}$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Appliquant la définition, on trouve donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

**R** Cette probabilité s'interprète comme la probabilité de l'événement  $B$  sachant que l'événement  $A$  est réalisé.

■ **Exemple 11 :** Dans l'exemple précédent, la probabilité  $\mathbb{P}_A(B)$  correspondant à la probabilité que le nombre soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

- Puisque l'on sait que le nombre tiré est pair, les seules possibilités pour ce nombre sont 2, 4 et 6.
- Nous sommes en situation d'équiprobabilité. Parmi les possibilités restantes, 4 et 6 sont les nombres supérieurs ou égaux à 3. La probabilité que le nombre soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair est donc  $\frac{2}{3}$ .

■ **Exemple 12 :** Une entreprise commande à une société de sondage une enquête sur la satisfaction de ses clients. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité qu'un client réponde est de 0,25. Si le client répond à l'appel, la probabilité qu'il réponde au questionnaire de la société est de 0,3. On note  $R$  l'événement « la personne répond à l'appel » et  $Q$  l'événement « la personne répond au questionnaire ».

D'après l'énoncé, on a  $\mathbb{P}(R) = 0,25$  et  $\mathbb{P}_R(Q) = 0,3$ . Ainsi, la probabilité qu'une personne prise au hasard réponde à l'appel puis au questionnaire vaut  $\mathbb{P}(R \cap Q) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(Q) = 0,3 \times 0,25 = 0,075$ .

**Propriété 8 :** Soit  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ . On a

- $0 \leq \mathbb{P}_A(B) \leq 1$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1$

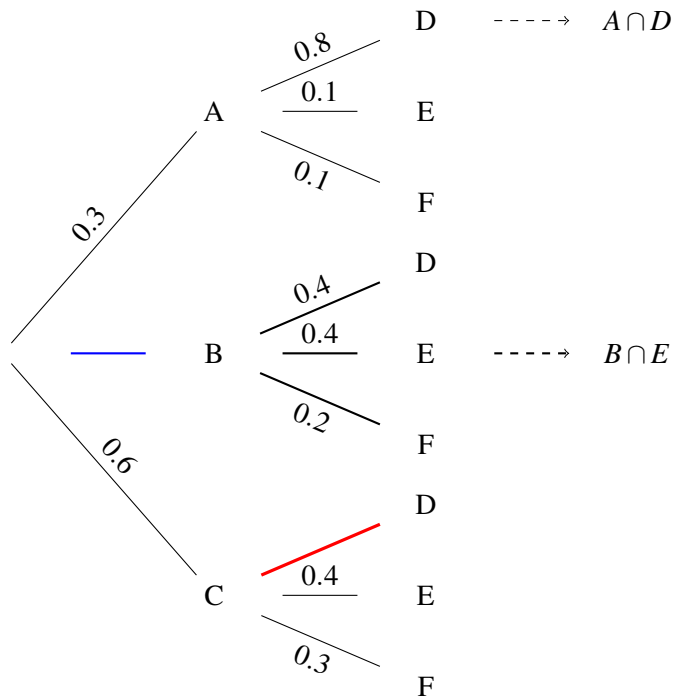
**Démonstration 7 :** Cela vient directement du fait que  $\mathbb{P}_A$  est une probabilité. Elle vérifie donc toutes les propriétés déjà énoncées.  $\square$

■ **Exemple 13 :** On note  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{10}$  et  $\mathbb{P}_A(B) = \frac{2}{3}$ . On a alors :

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) = \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{15}$
- $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

### 3.2 Lien avec les arbres pondérés

On considère une succession de deux expériences aléatoires dont l'arbre pondéré associé est représentée ci-dessous.



**Propriété 9 : (Règle de la somme)** Dans un arbre pondéré :

- La somme des probabilités issues d'un noeud est égale à 1.

- **Exemple 14 :**
- Sur cet arbre, on voit que  $\mathbb{P}(A) = 0.3$  et  $\mathbb{P}(C) = 0.6$ .
  - Puisque la somme des probabilités issues d'une branche vaut 1, on a  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$ , soit  $\mathbb{P}(B) = 0.1$ .
  - La probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_A(D)$  se lit sur la branche qui relie A à D. Ainsi,  $\mathbb{P}_A(D) = 0.8$ .
  - La somme des probabilités issues du noeud C doit valoir 1. On a donc  $\mathbb{P}_C(D) + \mathbb{P}_C(E) + \mathbb{P}_C(F) = 1$ . Ainsi,  $\mathbb{P}_C(D) = 0.3$ .

**R** Cette règle traduit le fait que l'on construit l'arbre en découpant l'univers selon un système complet d'événements.

**Propriété 10 : (Règle du produit)** Dans un arbre pondéré :

- La probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette issue

- **Exemple 15 :** Pour obtenir l'issue  $A \cap D$ , on passe par les sommets A puis D. On a alors  $\mathbb{P}(A \cap D) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$ .

**R** On retrouve la relation  $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$ .

### 3.3 Formule des probabilités composées

**Théorème 8 — Formule des probabilités composées :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini. Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements tels que  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$ . alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Dans le cas où  $n = 2$ , on retrouve la relation  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ .

La démonstration de ce résultat se fait par récurrence sur  $n$ .

■ **Exemple 16 :** Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules bleues. On tire successivement et sans remise trois boules. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges puis une boule bleue ?

Pour  $n \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ , notons  $B_n$  l'événement : « la  $n$ -ième boule tirée est bleue ». On recherche donc la probabilité de l'événement  $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3$ . D'après la formule des probabilités composées, on a

$$\mathbb{P}(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(\overline{B}_1) \times \mathbb{P}_{\overline{B}_1}(\overline{B}_2) \times \mathbb{P}_{\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2}(B_3).$$

Or,

- $\mathbb{P}(\overline{B}_1)$  est la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage. Il y a alors 6 boules rouges sur 10 au total, cette probabilité vaut donc  $\frac{6}{10}$  soit  $\frac{3}{5}$ .
- $\mathbb{P}_{\overline{B}_1}(\overline{B}_2)$  est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une boule rouge au premier. Dans ce cas, il reste 5 boules rouges pour 9 au total. Cette probabilité est donc de  $\frac{5}{9}$ .
- $\mathbb{P}_{\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2}(B_3)$  est la probabilité de tirer une boule bleue au troisième tirage sachant que l'on a tiré une boule rouge aux deux premiers tirages. Il y a donc dans l'urne 4 boules bleues pour 8 au total. Cette probabilité vaut donc  $\frac{4}{8}$  soit  $\frac{1}{2}$ .

Finalement,

$$\mathbb{P}(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

### 3.4 Formule des probabilités totales

**Théorème 9 — Formule des probabilités totales :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

Soit  $B$  un événement et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  un système complet d'événements. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \dots + \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

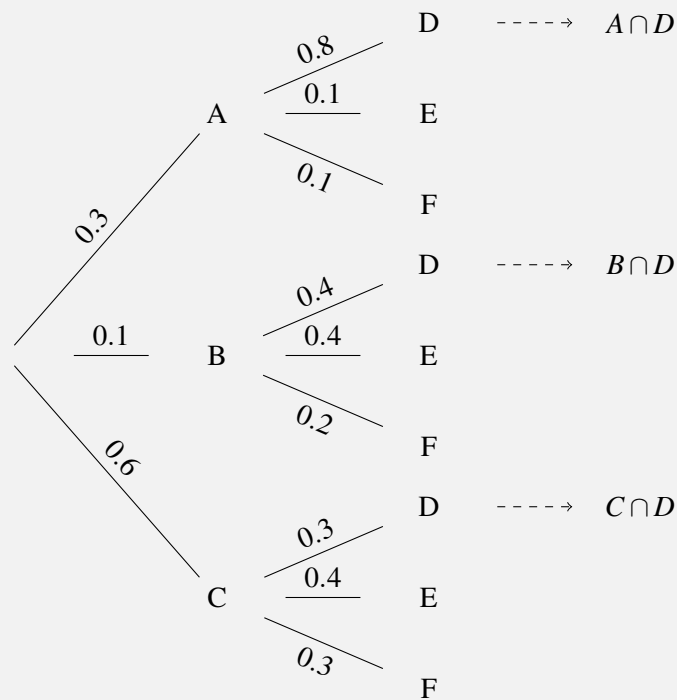
De plus, si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ , alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_{A_1}(B)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(B)\mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$$

On remarquera notamment le cas particulier du système complet d'événements  $(A, \overline{A})$ .

On a alors  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$ .

■ **Exemple 17 :** On reprend l'exemple de la partie précédente. On souhaite calculer la probabilité  $\mathbb{P}(D)$ . Pour cela, on regarde l'ensemble des branches qui contiennent l'événement  $D$ .



- $(A, B, C)$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .
- On a  $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D)$ . De plus,
  - $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}_A(D) \times \mathbb{P}(A) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$
  - $\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}_B(D) \times \mathbb{P}(B) = 0.4 \times 0.1 = 0.04$
  - $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}_C(D) \times \mathbb{P}(C) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$
- Ainsi,  $\mathbb{P}(D) = 0.24 + 0.04 + 0.18 = 0.46$ .

■ **Exemple 18 :** Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules bleues. On tire successivement et sans remise deux boules. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit bleue ?

La situation de l'urne au deuxième tirage dépend de ce qui a été tiré au premier, nous allons donc utiliser la formule des probabilités totales en conditionnant suivant ce qui a été tiré au premier tirage.

Pour  $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , notons  $B_n$  l'événement : « la  $n$ -ième boule tirée est bleue ». On recherche donc la probabilité de l'événement  $B_2$ .

Or,  $(B_1, \overline{B_1})$  est un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2).$$

Par ailleurs,

- $\mathbb{P}(B_1)$  est la probabilité d'obtenir une boule bleue au premier tirage. Elle vaut  $\frac{4}{10}$  soit  $\frac{2}{5}$ .
- $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$  est la probabilité de tirer une boule bleue au deuxième tirage sachant qu'on a tiré une bleue au premier. Il reste donc 3 boules bleues parmi 9 au total. Cette probabilité vaut donc  $\frac{3}{9}$  soit  $\frac{1}{3}$ .

De plus,

- $\mathbb{P}(\overline{B_1})$  est la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage. Elle vaut  $\frac{6}{10}$  soit  $\frac{3}{5}$ .
- $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2)$  est la probabilité de tirer une boule bleue au deuxième tirage sachant qu'on a tiré une rouge au premier. Il reste donc 4 boules bleues parmi 9 au total. Cette probabilité vaut donc  $\frac{4}{9}$ .

Finalement,

$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

### 3.5 Formule de Bayes

**Théorème 10 — Formule de Bayes :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini. Soit  $A$  et  $B$  deux événements de probabilité non nulle. Alors,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Démonstration 11 :** On a en effet

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

□

**R** La formule de Bayes est très souvent couplée à la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité au dénominateur.

■ **Exemple 19 :** Une maladie touche 1% de la population d'un pays. Une entreprise pharmaceutique développe alors un test permettant de diagnostiquer la maladie. Ce test présente les caractéristiques suivantes :

- si un individu est malade, le test sera positif dans 95% des cas ;
- si un individu n'est pas malade, le test sera négatif dans 99% des cas.

Si un individu fait un test et que celui-ci est positif, l'individu est-il malade ? On considère les événements  $M$  : « l'individu est malade » et  $T$  : « le test de l'individu est positif ».

D'après l'énoncé, nous avons  $\mathbb{P}(M) = 0,01$ ,  $\mathbb{P}_M(T) = 0,95$  et  $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$ . Pour répondre à la question, nous cherchons  $\mathbb{P}_T(M)$ . Or,

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(T)}.$$

Les probabilités au numérateur sont connues. Celle du dénominateur se calcule à l'aide de la formule des probabilités totales. En effet,  $(M, \overline{M})$  est un système complet d'événements. On a donc

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \cap M) + \mathbb{P}(T \cap \overline{M}) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(T).$$

Or,  $\mathbb{P}(M) = 0,01$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(\overline{M}) = 0,99$ . Par ailleurs,  $\mathbb{P}_M(T) = 0,95$ . Enfin, puisque  $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$ , il en vient que  $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,01$ . Finalement,

$$\mathbb{P}(T) = \frac{0,01 \times 0,95}{0,01 \times 0,95 + 0,99 \times 0,01} = \frac{0,95}{0,95 + 0,99} < \frac{1}{2}.$$

L'exemple ci-dessus montre qu'il est difficile de dépister efficacement des maladies rares, même avec des tests efficaces.

## 4 Indépendance

### 4.1 Indépendance de deux événements

**Définition 8 :** Soit  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

■ **Exemple 20 :** On choisit un nombre uniformément au hasard sur  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . On considère les événements :

- $A$  : le nombre obtenu est pair
- $B$  : le nombre obtenu est supérieur ou égal à 5

L'événement  $A \cap B$  est donc "le nombre obtenu est pair ET est supérieur ou égal à 5". Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, on a alors :

- $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$

On a bien  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ . Les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

**Propriété 11 :** Soit  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ .

$A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$

**Démonstration 12 :** Supposons que  $A$  et  $B$  sont indépendants. Alors,

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

Réciproquement, supposons que  $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ . Alors,  $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$  d'où  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .

Les événements  $A$  et  $B$  sont donc indépendants. □

**R** Cela revient à dire que les informations obtenues sur l'événement  $A$  n'apportent aucune information sur la réalisation de l'événement  $B$ .

**Propriété 12 :** Soit  $A$  et  $B$  deux événements indépendants. Alors  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.

**Démonstration 13 :** En effet,  $(A, \bar{A})$  est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

et donc

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \underset{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\bar{A}).$$

□

## 4.2 Indépendance d'une famille d'événements

**Définition 9 :** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2,  $A_1, \dots, A_n$  des événements.

- Les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont deux à deux indépendants lorsque :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j).$$

- Les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, I \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Lorsque des événements sont dits indépendants, sans précision, on considère en général qu'il s'agit d'une indépendance mutuelle.

**Attention**, ce n'est pas parce que les événements d'une famille sont deux à deux indépendants que ces événements sont mutuellement indépendants.

■ **Exemple 21 :** On lance un dé équilibré à quatre faces, numérotées de 1 à 4, et on regarde le numéro de la face du dessous.

On considère  $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$  et on note  $\mathbb{P}$  la probabilité uniforme sur cet univers.

On considère les événements suivants  $A = \{1; 2\}$ ,  $B = \{2; 3\}$  et  $C = \{1; 3\}$ . Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, on a alors  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ . Par ailleurs,

- $A \cap B = \{2\}$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$  et  $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ . Les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.
- $A \cap C = \{1\}$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$  et  $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$ . Les événements  $A$  et  $C$  sont indépendants.
- $B \cap C = \{3\}$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$  et  $\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$ . Les événements  $B$  et  $C$  sont indépendants.

Les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont donc deux à deux indépendants.

En revanche,  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$  et  $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$ .

Les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont donc pas mutuellement indépendants.

**Propriété 13 :** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2,  $A_1, \dots, A_n$  des événements.

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $B_i$  l'événement qui désigne soit  $A_i$ , soit  $\overline{A_i}$ .

- Si les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont indépendants deux à deux, alors les événements  $B_1, \dots, B_n$  le sont également ;
- Si les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants, alors les événements  $B_1, \dots, B_n$  le sont également ;