

# Probabilités sur un univers fini

## 1 Vocabulaire et probabilité

### ► Exercice 1 – Voir le corrigé

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé et soient  $A, B$  et  $C$  des événements. En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :

1. « L'un des événements  $A, B, C$  au moins est réalisé » ;
2. « Tous les événements  $A, B, C$  sont réalisés » ;
3. « Aucun des événements  $A, B, C$  n'est réalisé » ;
4. « Au moins un des événements  $A, B, C$  n'est pas réalisé » ;
5. «  $B$  et  $C$  sont réalisés mais pas  $A$  » ;
6. «  $A$  et  $B$  ne sont pas tous les deux réalisés » ;
7. « Exactement 2 événements sont réalisés parmi  $A, B, C$  ».

### ► Exercice 2 – Voir le corrigé

On lance un dé truqué à 10 faces, numérotées de 1 à 10, dont le résultat après un lancer suit la loi de probabilité suivante.

Issue	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

1. Déterminer la valeur de  $p$  pour bien avoir une loi de probabilité.
2. Donner la probabilité des événements suivants :
  - $A$  : « le résultat est 1, 4, 7 ou 9 » ;
  - $B$  : « le résultat est un nombre pair » ;
  - $C$  : « le résultat est un nombre impair ».

### ► Exercice 3 – Ecrimage 2011 – Voir le corrigé

La société Leazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés.

	$A$	$B$	$C$
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements  $H, V, D, N$  par :

- $H$  : « les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
  - $V$  : « les trois jetons sont alignés verticalement » ;
  - $D$  : « les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
  - $N$  : « les trois jetons ne sont pas alignés ».
1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
  2. Déterminer les probabilités  $P(H), P(V), P(D)$  des événements  $H, V, D$ .
  3. En déduire la probabilité de l'événement  $N$ .

### ► Exercice 4 – Voir le corrigé

On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants (on donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible) :

- $A$  : « n'obtenir que des cœurs »
- $B$  : « n'obtenir que des as »
- $C$  : « obtenir deux cœurs et un pique »

### ► Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit  $n$  un entier naturel. On considère une urne opaque dans laquelle on place 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, 3 boules numérotées 3, ...,  $n$  boules numérotées  $n$ . On tire au hasard une boule dans l'urne et on regarde le numéro obtenu.

1. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , donner la probabilité de l'événement élémentaire « le numéro tiré est  $k$  ».
2. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Donner la probabilité de l'événement « le numéro tiré est inférieur ou égal à  $k$  ».
3. Donner, selon la parité de  $n$ , la probabilité de l'événement « le numéro tiré est pair ».

### ► Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère une expérience aléatoire sur l'univers  $\{1, \dots, n\}$ . On suppose qu'il existe une loi de probabilité  $\mathbb{P}$  sur cet univers vérifiant

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(\{1, \dots, k\}) = \lambda k^2$$

Déterminer, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , la probabilité de l'événement  $\{k\}$ .

## 2 Probabilités conditionnelles

### ► Exercice 7 – Voir le corrigé

On place dans une urne opaque 1 bille de couleur blanche et 1 bille de couleur rouge. On pioche au hasard une bille de couleur dans l'urne et on regarde sa couleur. On remet alors la bille piochée ainsi qu'une bille de la couleur qui n'a pas été piochée dans l'urne. On répète l'expérience autant que nécessaire.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche, puis une boule rouge, puis une boule blanche ?
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage ?
3. On a tiré une boule blanche au deuxième tirage. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une boule blanche au premier tirage ?

### ► Exercice 8 – Voir le corrigé

Dans une école de statistiques, le recrutement se fait de deux façons :

- 10% des candidats sont sélectionnés sur leur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On note

- $D$  l'événement : « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- $A$  l'événement : « le candidat a été admis à l'école ».

1. D'après l'énoncé, donner les probabilités  $\mathbb{P}(D)$ ,  $\mathbb{P}_D(A)$  et  $\mathbb{P}_{\bar{D}}(A)$ .
2. Calculer la probabilité de l'événement  $A$ .
3. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné initialement ?

### ► Exercice 9 – Les mots de passe de Rose – Voir le corrigé

Rose ne se souvient pas de son mot de passe pour sa session ENT. Fort heureusement, elle a noté sur son téléphone l'ensemble de ses 10 mots de passe, mais ceux-ci ont malencontreusement été mélangés et elle ne se souvient pas à quoi correspondent tous ces mots de passe. Elle décide donc d'en choisir un au hasard, puis un autre, et ainsi de suite, jusqu'à trouver le bon. Ce que Rose ne sait pas encore, c'est que l'ENT a adopté une nouvelle politique de sécurité, si bien que si elle saisit 3 mots de passe erronés, sa session sera bloquée.

Quelle est la probabilité que Rose bloque sa session ?

### ► Exercice 10 – Cho-colle-ah ! – Voir le corrigé

Un étudiant remarque que son professeur de mathématiques se révèle beaucoup plus sympathique en colle si on lui offre des chocolats. En effet, en temps normal, la probabilité de sortir de colle avec ce professeur avec une note supérieure à la moyenne est de  $\frac{2}{5}$ , mais lorsqu'on lui offre des chocolats, cette probabilité monte à  $\frac{4}{7}$ .

On estime qu'un étudiant sur 3 adopte donc la stratégie d'offrir des chocolats au professeur avant la colle.

Un étudiant sort alors de colle et affirme fièrement avoir obtenu une note supérieure à la moyenne. Quelle est la probabilité qu'il ait offert des chocolats au professeur ?

*Remarque : le moyen le plus sûr d'avoir une bonne note en colle est l'apprentissage régulier du cours.*

### ► Exercice 11 – Gastronomie en ECG1 – Voir le corrigé

En ECG1, les étudiants raffolent de Tasty Crousty le midi. Sans le savoir, la probabilité avec laquelle ceux-ci ces étudiants se délectent de leur met favori suit la règle suivante.

- Si un jour donné, les étudiants sont allés chercher un Tasty Crousty, la probabilité qu'il en prennent de nouveau un le lendemain est de  $\frac{2}{5}$  ;
- Si, un jour donné, les étudiants n'ont pas été chercher leur Crousty préféré, la probabilité qu'ils en prennent un le lendemain est de  $\frac{4}{5}$ .

Pour simplifier l'étude, on ne tient pas compte des week-ends et vacances dans cette modélisation. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $T_n$  l'événement « les étudiants ont pris un Tasty Crousty le jour  $n$  après le début de l'étude » et  $p_n = \mathbb{P}(T_n)$ . Étant donné les miettes qu'il reste dans la salle de classe, nous supposons que  $p_0 = 1$ .

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $p_{n+1} = -\frac{2}{5}p_n + \frac{4}{5}$ .
2. En déduire une expression de  $p_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

### ► Exercice 12 – Voir le corrigé

Un professeur un poil sadique dont nous taïrons le nom s'amuse à lancer des stylos sur ses élèves lorsque ceux-ci donnent des mauvaises réponses. Le professeur dispose de 4 stylos rouges et de 4 stylos bleus. Si un élève donne une mauvaise réponse, le professeur choisit au hasard un de ses stylos et le lance en direction de l'élève. Le professeur ne récupère pas le stylo lancé.

Durant un cours particulièrement éprouvant, le professeur a lancé tous ses stylos les uns après les autres (soit 8 lancers au total). Pour tout entier naturel  $k \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ , on note  $R_k$  l'événement « le  $k$ -ième stylo lancé est rouge ».

1. Exprimer, à l'aide de la famille  $(R_k)_{k \in \llbracket 1, 8 \rrbracket}$  et des opérations ensemblistes, les événements suivants
  - $A$  : « le professeur a lancé un stylo bleu puis un stylo rouge » ;
  - $B$  : « le professeur a lancé tous ses stylos rouges avant de lancer les stylos bleus » ;
  - $C$  : « lors des trois premiers lancers, le professeur a lancé exactement un stylo rouge » ;
2. Calculer la probabilité des événements  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
3. Calculer  $\mathbb{P}(R_2)$ .
4. Un étudiant n'a pas pu voir le premier stylo lancé. En revanche, il a bien remarqué que le deuxième stylo qui arrivait dans sa direction était bien rouge. Quelle est la probabilité que le premier stylo lancé ait été un stylo rouge également ?

### ► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère trois points distincts du plan nommés  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Un pion se déplace aléatoirement sur ces trois points. À l'étape  $n = 0$ , on suppose que le pion se trouve sur le point  $A$ . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$  ne dépend que de la position du pion à l'étape  $n$  ;
- pour passer de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$ , on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $A_n$  l'évènement « le pion se trouve en  $A$  à l'étape  $n$  »,  $B_n$  l'évènement « le pion se trouve en  $B$  à l'étape  $n$  » et  $C_n$  l'évènement « le pion se trouve en  $C$  à l'étape  $n$  ».

On note également, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ ,  $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ ,  $c_n = \mathbb{P}(C_n)$  et  $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

1. Compléter le programme suivant, écrit en Python, pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite ici et renvoie le trajet du pion après  $n$  étapes.

Pour cela à chaque étape,

- on choisit un nombre au hasard entre 0 et 1.
  - Si celui-ci vaut 0, le pion ne bouge pas
  - Sinon, on choisit un nouveau nombre entre 0 et 1 qui permet de choisir la destination entre les deux positions restantes (il ya donc plusieurs cas à gérer)
- On ajoute alors la position actuelle à la liste des positions visitées.

```

1 import numpy.random as rd
2
3 point_courant = "A"
4 liste_points = ["A"]
5 n = int(input("Valeur de n ? ")) #pour renseigner la valeur de n
6
7 for i in range(n):
8     bouge = rd.randint(..., ...)
9     if bouge == 0 :
10        ... #on ajoute le point_courant à la liste_points
11    else :
12        destination = rd.randint(..., ...)
13        if point_courant == "A" :
14            if destination == 0:
15                point_courant = "B"
16            else :
17                point_courant = "C"
18        elif point_courant == "B" :
19            if ... :
20                point_courant = ...
21            else :
22                point_courant = ...
23        else :
24            ... :
25            ...
26            ... :
27            ...
28        liste_points.append(...)
29 print(liste_points)

```

2. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ . Faire de même pour  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$ .
3. Donner une matrice  $M$  telle que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $V_{n+1} = MV_n$ .
4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $V_n = M^n V_0$ .

5. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 2 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

6. En déduire une expression de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

7. Déterminer les limites des suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$ .

### 3 Indépendance

#### ► Exercice 14 – Voir le corrigé

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire au hasard une boule dans l'urne et on regarde son numéro. On considère l'événement  $A$  : « le numéro est pair » et  $B$  : « le numéro est un multiple de 3 »

1. Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?
2. Reprendre la question précédente en supposant cette fois que l'urne contient 13 boules numérotées.

#### ► Exercice 15 – Voir le corrigé

On lance  $n$  fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois le numéro 6.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un 5 et au moins un 6.
3. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il génère  $n$  lancers de dés équilibrés à 6 faces et affiche True si le résultat présente au moins un 5 et au moins un 6. Sinon, celui-ci affiche False  
On rappelle que `rd.randint(a, b, n)` génère  $n$  nombres aléatoires choisis entre  $a$  inclus et  $b$  exclus, de manière indépendante.

```

1 import numpy.random as rd
2
3 n = int(input("Valeur de n ? "))
4 lancers = rd.randint(..., ..., ...)
5 au_moins_un_cinq = False
6 au_moins_un_six = False
7 for resultat in lancers :
8     if lancer == 6 :
9         ...
10    if ...
11        ...
12 print(au_moins_un_cinq and au_moins_un_six)

```

#### ► Exercice 16 – Habib Party – Voir le corrigé

Habib joue à un jeu qui se déroule en trois manches. Pour chaque manche, sa probabilité de victoire est de  $\frac{1}{4}$ . Il lui suffit de remporter une seule des trois manches pour remporter le jeu.

Pour  $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'événement « Habib remporte la manche  $k$  ». On suppose que ces événements sont mutuellement indépendants.

1. Exprimer l'événement « Habib remporte le jeu » en utilisant la famille  $(A_k)_{k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket}$  et les opérations ensemblistes. On fera apparaître des unions disjointes.
2. Déterminer la probabilité qu'Habib remporte le jeu.

**► Exercice 17 – Les parties de Tim et Louis – Voir le corrigé**

Tim et Louis se lancent dans un défi vidéoludique. Ceux-ci jouent un nombre au départ indéterminé de parties jusqu'à ce que Tim remporte deux fois de suite une partie. On suppose que les résultats des parties jouées sont mutuellement indépendants et que, Tim ayant passé beaucoup plus de temps que son camarade sur ce jeu, la probabilité de victoire de Tim pour chaque partie est de  $\frac{2}{3}$ . Puisque chaque partie ne peut aboutir sur un match nul, la probabilité de victoire de Louis sur une partie donnée est donc de  $\frac{1}{3}$ .

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $G_n$  l'événement « Tim remporte la partie  $n$  »,  $T_n$  l'événement « Le match s'arrête après la partie  $n$  » et  $p_n = \mathbb{P}(T_n)$ .

1. Calculer  $p_1$  et  $p_2$ .
2. En utilisant le système complet d'événements  $(G_1; \overline{G_1})$ , montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$$

3. En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $S_n = \sum_{k=1}^n p_k$ .
  - (a) Justifier que  $S_n$  peut être interprétée comme la probabilité d'un événement que l'on déterminera.
  - (b) Calculer  $S_n$ .
  - (c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ . Comment pourrait-on interpréter cette limite ?