Dérivabilité

1 Dérivée en un point

1.1 Taux de variation

Définition 1 : Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de l'intervalle I. On appelle taux de variation de f entre x_1 et x_2 la quantité :

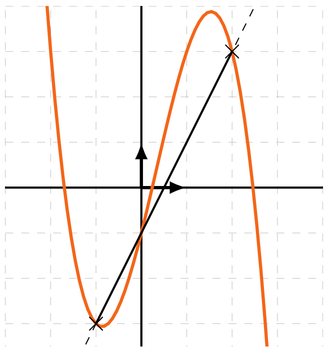
$$T_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

■ **Exemple 1 :** Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$. Le taux de variation de f entre 1 et 4 vaut

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4^2 - 2 \times 4 - (1^2 - 2 \times 1)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

R Ce taux de variation correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$

■ **Exemple 2 :** On considère une fonction f dont la courbe est représentée ci-contre dans un repère orthonormé.
- Le taux de variation de f entre -1 et 2 vaut 2.
- Le taux de variation de f entre -1 et 1 vaut 3.



1.2 Nombre dérivé

Définition 2 : Soit I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.

On dit que la fonction f est dérivable en a si le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ admet une limite finie ℓ lorsque h tend vers 0.

Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a, et est notée

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Propriété 1 : Soit I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Démonstration 1 : On a $\lim_{x \to a}(x - a) = 0$ et, f étant dérivable en a, on a $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Par composition des limites, on a $\lim_{x \to a} \frac{f(a + x - a) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ c'est-à-dire $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. □

■ **Exemple 3 :** Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$. On veut étudier la dérivabilité de f en $x = 0$. Soit donc $h \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(0+h)^2-2(0+h)-0}{h} = \frac{h^2-2h}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = -2+h$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers -2. La fonction f est donc dérivable en $x = 0$. Le nombre dérivé de f en 0 est $f'(0) = -2$

■ **Exemple 4 :** On rappelle que pour tout réel x, la valeur absolue de x, notée $|x|$ vaux x si $x \geqslant 0$ et $-x$ sinon. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = |x[$. Calculons le taux de variation de la fonction f en 0. Soit $h > 0$; alors

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

En revanche, si $h < 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

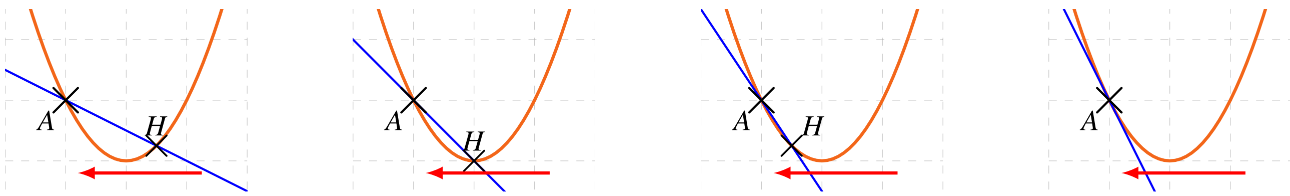
Le taux de variation ne se rapproche pas d'une seule et unique valeur : la fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

1.3 Interprétation graphique

On fixe un point A d'abscisse a sur la courbe et on trace les droites qui passent par ce point et par un autre point H d'abscisse $a+h$ sur la courbe.

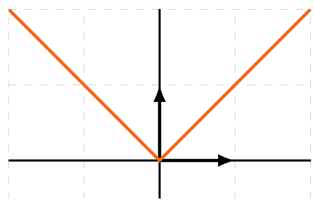
Si la fonction est dérivable en a, plus le point H est proche du point A (c'est-à-dire plus h est proche de 0), plus le coefficient directeur de la droite (AH) se rapproche d'une valeur qui est le nombre dérivé de la fonction en ce point.

■ **Exemple 5 :** Dans l'exemple ci-dessous, on a tracé la courbe d'une fonction f dans un repère orthonormé. Le coefficient directeur de la droite (AH) se rapproche de -2. Le nombre dérivé de f en a vaut donc -2



La sécante (AH) se rapproche alors d'une droite limite dont le coefficient directeur vaut $f'(a)$ et que l'on appelle « tangente à la courbe de f au point d'abscisse a ».

La fonction valeur absolue, elle, n'est pas dérivable en 0. On peut le voir graphiquement : la courbe est "pointue" en 0.



1.4 Lien avec la continuité

Propriété 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration 2 : Supposons que f est dérivable en a.

On considère la fonction g définie pour tout réel $x \in A$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque f est dérivable en a, on a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. La fonction g est donc continue en a.

Par ailleurs, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et donc $f(x) = (x-a)g(x) + f(a)$.

La quantité à droite admet une limite en a et on a alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}((x-a)g(x) + f(a)) = (a-a)g(a) + f(a) = f(a).$$

Finalement, $\lim\limits_{x\to a} f(a) = f(a)$. La fonction f est donc continue en a. □

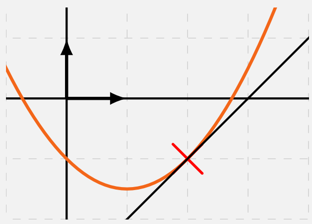
1.5 Tangente à une courbe

Définition 3 : Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction définie sur I et dérivable en a.

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point de coordonnées $(a; f(a))$ dont le coefficient directeur vaut $f'(a)$.

■ **Exemple 6 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative de f est représentée ci-contre dans un repère orthonormé. On souhaite tracer la tangente T à cette courbe à l'abscisse $x = 2$.



Puisque $f(2) = \dfrac{1}{2} \times 2^2 - 2 - 1 = -1$, la tangente passe par le point de coordonnées (2;-1). Soit $h \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(2+h)^2 - (2+h) - 1 - (-1)}{h} = \frac{2 + 2h + \frac{1}{2}h^2 - 2 - h}{h} = \frac{h + \frac{1}{2}h^2}{h} = 1 + \frac{1}{2}h$$

Ce taux de variation tend vers 1 lorsque h tend vers 0.
La tangente T a donc pour coefficient directeur $f'(2)$, d'est-à-dire 1.

Propriété 3 : Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction définie sur I et dérivable en a. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration 3 : Toute droite non verticale admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$.

- On sait que le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$. L'équation est donc de la forme $y = f'(a)x + p$
- La droite passe par le point de coordonnées $(a; f(a))$. On a donc $f(a) = f'(a) \times a + p$, c'est-à-dire $p = f(a) - f'(a) \times a$
- La tangente a donc pour équation $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a = f'(a) \times (x - a) + f(a)$

□

■ **Exemple 7 :** Dans l'exemple précédent, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$ a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 1 \times (x-2) + (-1) = x - 3$

Lorsque f est dérivable en a, si x est proche de a, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est proche de $f'(a)$.

En isolant $f(x)$, on obtient que $f(x)$ est proche de $f'(a)(x-a) + f(a)$: la courbe de f est proche de la tangente au voisinage de a. Plus précisément, on a la propriété suivante :

Propriété 4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel x intérieur à I. Alors il existe un réel $\delta > 0$ et une fonction ε définie sur $]-\delta; \delta[$ tels que :

$$\forall h \in]-\delta; \delta[,\ f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

1.6 Dérivabilité à gauche / à droite

Définition 4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

- On dit que f est dérivable à gauche en a lorsque le taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par valeurs inférieures.

  Dans ce cas, on appelle nombre dérivé à gauche, noté $f'_g(a)$ le réel $f'_g(a) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- On dit que f est dérivable à droite en a lorsque le taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieures.

  Dans ce cas, on appelle nombre dérivé à droite, noté $f'_d(a)$ le réel $f'_d(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Propriété 5 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Dans ce cas, on a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Démonstration 4 : C'est une conséquence directe de ce qui a été vu sur les limites de fonction. □

Méthode 1 : Pour déterminer si une fonction f définie par morceaux est dérivable en a.

- On calcule le taux de variations de la fonction pour les valeurs supérieures à a et on en détermine la limite (penser à simplifier pour lever l'indéterminée) ;
- On calcule le taux de variations de la fonction pour les valeurs inférieures à a et on en détermine la limite (penser à simplifier pour lever l'indéterminée) ;
- Si ces deux limites existent et sont identiques, la fonction f est dérivable en a.

Remarque : de la même manière que pour la dérivabilité, il est possible d'étudier la limite en 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ que h tend vers 0 ou celle de $\frac{f(a)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a.

■ **Exemple 8 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2\ln(x) & \text{sinon} \end{cases}$.

Déterminons si la fonction f est dérivable en 0.

- soit $x < 0$. On a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2-0}{x-0} = x \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.

- Soit $x > 0$. On a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\ln(x)-0}{x-0} = x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

Finalement, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Remarque : puisque f est dérivable en 0, on a également montré qu'elle était continue en 0. En général, cette continuité est étudiée au préalable.

■ **Exemple 9 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^3-3x & \text{si } x > 2 \\ x^2-2 & \text{sinon} \end{cases}$.

Déterminons si la fonction f est dérivable en 2.

- Soit $x < 2$. On a

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2-2-2}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} 4.$$

Ainsi, f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = 4$.

- Soit $x > 2$. On a

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^3-3x-2}{x-2}$$

Or, 2 est racine du polynôme $x \mapsto x^3-3x-2$. Il existe donc un polynôme Q tel que, pour tout réel x, on a $x^3-3x-2 = (x-2)Q(x)$. La division euclidienne de x^3-3x-2 par $x-2$ montre alors que pour tout réel x, on a $x^3-3x-2 = (x-2)(x^2+2x+1)$. Ainsi,

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2} = x^2+2x+1 \underset{x\to 2^+}{\longrightarrow} 9$$

Ainsi, f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 9$.

f est donc dérivable à droite et à gauche en 2 mais les limites obtenues ne sont pas égales : f n'est pas dérivable en 2.

On peut en revanche facilement montrer que la fonction f est tout de même continue en 2.

1.7 Extrema locaux

Définition 5 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- On dit que f admet un maximum local en a si
$$\exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \,|\, \forall x \in I \cap]a-\delta; a+\delta[,\ f(x) \leqslant f(a).$$
- On dit que f admet un minimum local en a si
$$\exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \,|\, \forall x \in I \cap]a-\delta; a+\delta[,\ f(x) \geqslant f(a).$$
- On dit que f admet un extremum local si f admet un minimum local ou un maximum local en a.

▪ **Exemple 10 :** On considère la fonction f dont une représentation graphique est donnée ci-dessous.

La fonction f admet un minimum local en -2, en 1 et en 3. Elle admet un maximum local en -3, en -1 et en 2.

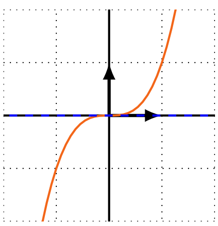
Propriété 6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$ **qui n'est pas un bord** de I.
Si f admet un extremum local en a et si f est dérivable a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration 5 : Supposons que f admet un maximum local en a. Posons alors $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout réel $x \in]a-\delta; a+\delta[$, on a $f(x) \leqslant f(a)$.

- Pour tout $x \in]a-\delta; a[$, on a alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. Puisque f est dérivable en a (et est donc dérivable à gauche en a), on peut passer à la limite lorsque x tend vers a par valeurs inférieures. Ainsi, $f'_g(a) \geqslant 0$.
- Pour tout $x \in]a; a+\delta[$, on a alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$. Puisque f est dérivable en a (et est donc dérivable à droite en a), on peut passer à la limite lorsque x tend vers a par valeurs inférieures. Ainsi, $f'_d(a) \leqslant 0$.

Or, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$. On a donc à la fois $f'(a) \leqslant 0$ et $f'(a) \geqslant 0$. Ainsi, $f'(a) = 0$. □

La réciproque est fausse ! Ce n'est pas parce que $f'(a) = 0$ que f admet un extremum local en a.
Si l'on considère la fonction $f : x \mapsto x^3$, on a alors $f'(0) = 0$. La courbe de f présente une tangente horizontal à son point d'abscisse 0 mais n'admet pas d'extremum local en ce point pour autant.



2 Fonction dérivée

2.1 Fonction dérivée

Définition 6 : Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors fonction dérivée de f sur I la fonction

$$f' : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array} \right.$$

■ **Exemple 11 :** Soit $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$; nous allons montrer que f est dérivable en x, et donc que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit donc $h \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0}(2x+h) = 2x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$.

2.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-nx^{-n-1}$
x^α, $\alpha \notin \mathbb{Z}$	$]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$

Démonstration 6 : On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Soit $x > 0$ et h un réel non nul tel que $x+h > 0$. On a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right) = \frac{1}{h} \times \frac{-h}{x^2+hx} = -\frac{1}{x^2+hx}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2+hx} =\right) = -\dfrac{1}{x^2}$.

f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Le même raisonnement vaut également si $x < 0$.

Ainsi, f est également dérivable sur $]-\infty;0[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. □

Démonstration 7 : On considère la fonction f définie pour tout $x \in [0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Soit $x \in]0;+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h>0$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$. □

R La fonction Racine carrée est définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0 !

2.3 Limites usuelles

Les propriétés précédentes permettent d'établir certaines limites usuelles en reconnaissant un taux de variations.

Propriété 7 : Soit α un réel strictement positif. On a les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

Démonstration 8 :

- Soit x un réel non nul.
  Le taux de variations de la fonction exponentielle entre 0 et x vaut $\frac{e^x-e^0}{x-0}$ soit $\frac{e^x-1}{x}$.
  Or, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\exp'(0)=e^0=1$.
- Soit $x>0$. Le taux de variations de la fonction ln entre 1 et x vaut $\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$ soit $\frac{\ln(x)}{x-1}$.
  Or, la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}=\ln'(1)=1$.
- Par ailleurs, soit $x>-1$.
  On a alors $\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(1+x)}{1+x-1}$. Or, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$ et, d'après le point précédent, $\lim\limits_{X\to 1}\frac{\ln(X)}{X-1}=1$.
  Par composition de limites, on a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.
  On aurait aussi tout simplement pu utiliser le taux de variation de la fonction $x\mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et x.
- Soit $x>-1$ avec $x\neq 0$.
  Le taux de variations de la fonction $f : t\mapsto (1+t)^\alpha$ entre 0 et x vaut $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.
  Or, la fonction $f : t\mapsto(1+t)^\alpha$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f' : t\mapsto \alpha(1+t)^{\alpha-1}$.
  Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=f'(0)=\alpha$.

□

■ **Exemple 12 :** En reconnaissant le taux de variations de la fonction $x\mapsto(1+x)^{1/2}$, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

On aurait aussi pu utiliser la quantité conjuguée. En effet, pour tout réel $x>-1$,

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}.$$

■ **Exemple 13 :** On souhaite déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Pour tout $x>0$, on a $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\exp\left(x\ln\left((1+\dfrac{1}{x}\right)\right)=\exp\left(\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

■ **Exemple 14 :** On considère la fonction $f : x\mapsto\begin{cases}\mathrm{e}^x+x & \text{si } x\leqslant 0\\ (x+1)^2 & \text{sinon}\end{cases}$.

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'abord, f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ (elle est définie à l'aide de fonctions usuelles dérivables sur ces intervalles).

Par ailleurs, on a $f(0)=\mathrm{e}^0+0=1$. Étudions la dérivabilité de f en 0.

- Soit $h<0$. On a alors

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{e^h+h-1}{h}=1+\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}.$$

  On reconnaît le taux de variations de la fonction exponentielle entre 0 et h.
  On a alors $\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=1+\exp'(0)=2$.
  La fonction f est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=2$.

- Soit $h>0$. On a alors

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{(h+1)^2}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=h+2.$$

  On a alors $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=1+\exp'(0)=2$.
  La fonction f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=2$.

Puisque f est dérivable à droite et à gauche en 0 et que $f'_d(0)=f'_g(0)$, alors f est dérivable en 0 et $f'(0)=2$.

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3 Opérations sur les dérivées

Dans toute la partie suivante, I désigne un intervalle.

3.1 Produit par un réel

Propriété 8 : Soit u une fonction définie et dérivable sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors la fonction $\lambda u : x \mapsto \lambda u(x)$ est définie sur I, et $(\lambda u)' = \lambda \times u'$

Démonstration 9 : Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

$$\frac{\lambda u(x+h) - \lambda u(x)}{h} = \lambda \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

Or, puisque u est dérivable sur I, alors $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} \lambda \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \lambda u'(x)$

Ainsi, λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda \times u'$. □

■ **Exemple 15 :** La fonction $f : x \mapsto 4x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a $f'(x) = 4 \times 2x = 8x$.

3.2 Somme de fonctions dérivables

Propriété 9 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur I.
La fonction $u+v : x \mapsto u(x)+v(x)$ est définie et dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

Démonstration 10 : Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

$$\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Or, puisque u et v sont dérivables sur I, alors $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x)$.

Ainsi, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} = u'(x)+v'(x)$.

Finalement, $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u'+v'$. □

■ **Exemple 16 :** La fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x + 5$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto 2x+3$

3.3 Produit de fonctions dérivables

Propriété 10 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur I.
La fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration 11 : Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\
&= v(x+h)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}
\end{aligned}$$

u et v étant dérivables sur I, on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x)$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{h\to 0}(x+h) = x$. La fonction v étant dérivable sur I, elle est aussi continue sur I . Par composition des limites, on a donc $\lim\limits_{h\to 0} v(x+h) = v(x)$.

Finalement, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h} = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. La fonction uv est donc dérivable sur I et $(uv)' = u'v+uv'$. □

■ **Exemple 17 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u' : x \mapsto 2x$;
- La fonction $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $v' : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x = x(x+2)\mathrm{e}^x.$$

3.4 Quotient de fonctions dérivables

Propriété 11 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur I telle que v ne s'annule pas sur I.
La fonction $\dfrac{u}{v} \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Démonstration 12 : Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{u}{v}(x+h)-\frac{u}{v}(x)}{h} &= \frac{1}{h} \times \left(\frac{u(x+h)v(x)}{v(x+h)v(x)} - \frac{u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}\right) \\
&= \frac{1}{h} \times \frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)} \\
&= \frac{1}{v(x+h)v(x)} \times \left(\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h} - \frac{v(x+h)u(x)-v(x)u(x)}{h}\right) \\
&= \frac{1}{v(x+h)v(x)} \times \left(v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

u et v étant dérivables sur I, on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x)$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{h\to 0}(x+h) = x$. La fonction v étant dérivable sur I, elle est aussi continue sur I . Par composition des limites, on a donc $\lim\limits_{h\to 0} v(x+h) = v(x)$.

Finalement, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{u}{v}(x+h)-\frac{u}{v}(x)}{h} = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$.

La fonction $\dfrac{u}{v}$ est donc dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. □

■ **Exemple 18 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x+2}{3x-7}$.

- Cette fonction est définie pour tout x tel que $3x-7 \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$;
- La fonction $u : x \mapsto x^2+2x+2$ est définie est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u' : x \mapsto 2x+2$;
- La fonction $v : x \mapsto 3x-7$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $v' : x \mapsto 3$. De plus, cette fonction ne s'annule pas sur les intervalles $\left]-\infty \dfrac{7}{3}\right[$ et $\left]\dfrac{7}{3};+\infty\right[$.

La fonction f est donc dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\infty \dfrac{7}{3}\right[$ et $\left]\dfrac{7}{3};+\infty\right[$. De plus, pour tout x dans dans l'un de ces intervalles :

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} &= \frac{(2x+2)(3x-7)-3(x^2+2x+2)}{(3x-7)^2} \\ &= \frac{6x^2-14x+6x-14-3x^2-6x-6}{(3x-7)^2} \\ &= \frac{3x^2-14x-20}{(3x-7)^2}. \end{aligned}$$

3.5 Composition de fonctions dérivables

Propriété 12 : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$.

La fonction $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$ est dérivable sur I et $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.

■ **Exemple 19 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2+3x-2$. Pour tout réel x, on a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 2x+3$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = \mathrm{e}^x$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x-2}.$$

Propriété 13 — Cas particuliers : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{u'}{u^2}$.

■ **Exemple 20 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = (4x+1)^9$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 4x+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, $f = u^9$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 9 \times u' \times u^8$, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 9 \times 4 \times (4x+1)^{9-1} = 36 \times (4x+1)^8.$$

■ **Exemple 21 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Or, $f = \dfrac{1}{u}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

■ **Exemple 22 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$.

Notons $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f. Soit x un réel. On a

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow 4-x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow x \in [-2;2].$$

Ainsi, f est définie sur $[-2;2]$. Cependant, la fonction Racine Carrée n'est pas dérivable en 0 : le domaine de dérivabilité de f est donc $]-2;2[$. Pour tout réel $x \in]-2;2[$, on a

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

■ **Exemple 23 :** On considère la fonction $g : x \mapsto \ln(2x^2+5x+4)$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2x^2+5x+4$.
Le discriminant du polynôme $2x^2+5x+4$ est $5^2 - 4 \times 4 \times 2 = -7 < 0$.

Ainsi, la fonction $u : x \mapsto 2x^2+5x+4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u(x) > 0$. Or, $g = \ln(u)$.
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = \dfrac{u'}{u}$. Finalement, pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{4x+5}{2x^2+5x+4}.$$

4 Dérivées successives

Définition 7 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est de classe C^1 sur I si

- f est dérivable sur I ;
- f' est continue sur I.

■ **Exemple 24 :** Les fonctions polynômes, l'exponentielle, le logarithme népérien sont de classe C^1 sur leurs domaines de définition respectifs.

La définition vue précédemment peut naturellement se prolonger...

Définition 8 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est de classe C^2 sur I si

- f est dérivable sur I ;
- f' est dérivable sur I (on dit alors que f est deux fois dérivable sur I) ;
- f'' est continue sur I.

Et ainsi de suite...

Définition 9 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est de classe C^n sur I si

- f est n fois dérivable sur I ;
- Sa dérivée n-ième, notée $f^{(n)}$ est continue sur I.

Enfin, on définit l'ensemble suivant.

Définition 10 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^n pour tout entier naturel non nul n.

■ **Exemple 25 :** Les fonctions polynômes, l'exponentielle, le logarithme népérien sont en réalité de classe C^∞ sur leurs domaines de définition respectifs.

Propriété 14 : Soit f et g deux fonctions de classes C^n sur un intervalle I et λ un réel.

Alors λf, $f+g$, fg sont de classes C^n sur I.
De plus, si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est aussi de classe C^n sur I.

Cette proposition s'étend donc naturellement aux fonctions de classe C^∞.

5 Inégalité des accroissements finis

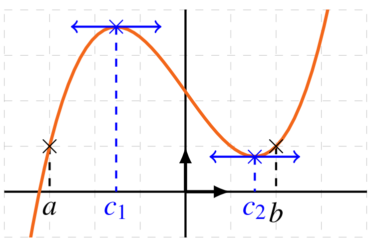
Avant d'aborder ce résultat, présentons quelques résultats « culturels », pour que l'inégalité dont le nom est mentionné ici ne semble pas sortir du chapeau.

5.1 Théorème de Rolle

Théorème 13 — Théorème de Rolle - Hors programme : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

On suppose que $f(a)=f(b)$. Alors il existe un réel $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.

Interprétation graphique : cela revient à dire que f admet des tangentes horizontales (et même des extrema locaux). Notons qu'un tel réel c n'est pas forcément unique.



Démonstration 14 : Si la fonction est constante sur $]a;b[$ alors la dérivée de f est nulle, ce qui démontre le résultat.

Supposons désormais que f n'est pas constante. Puisque f est continue sur le segment $[a;b]$, elle est bornée et atteint ses bornes. Notons alors m son minimum et M son maximum.

- Si $M > f(a)$, notons alors c un réel tel que $f(c) = M$. On a alors $c \in]a;b[$. Or, la fonction f est dérivable sur $]a;b[$ et c est un réel qui n'est pas un bord de cet intervalle. Puisque f admet un maximum en c, on a donc $f'(c) = 0$.
- Si $M = f(a)$, alors on a nécessairement $m < f(a)$ (sinon, on revient au cas de la fonction constante). Notons alors c un réel tel que $f(c) = m$. On a alors $c \in]a;b[$. De même que précédemment, on en conclut que $f'(c) = 0$.

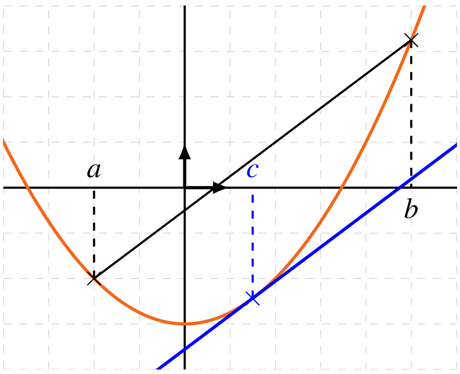
□

5.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 15 — Théorème des accroissements finis – Hors programme : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

Alors il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation graphique : Si l'on considère une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, cela signifie qu'il existe une tangente parallèle à la droite qui passe par les points de coordonnées $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$.



Démonstration 16 : On vérifie aisément que la droite $[AB]$ a pour équation $y = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

On considère alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - \left(f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$.

- Les opérations sur les fonctions permettent d'établir que g est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.
- On vérifie que $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$.

Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or, pour tout réel x, $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ainsi, il existe un réel c tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

5.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème 17 — Inégalité des accroissements finis : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe un réel positif k tel que, pour tout réel $x \in I$, on a $|f'(x)| \leqslant k$. Alors,

$$\forall a, b \in I,\ |f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|.$$

Démonstration 18 : Soit a et b deux réels de l'intervalle I. On suppose que $a < b$ (si $a = b$, le résultat est immédiat, et si $a > b$, il suffit d'échanger le rôle de ces deux réels dans ce qui suit).

Puisque f est dérivable sur I, alors f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout réel $x \in I$, on a $|f'(x)| \leqslant k$, c'est-à-dire $-k \leqslant f'(x) \leqslant k$.

On a donc en particulier $-k \leqslant f'(c) \leqslant k$ c'est-à-dire $-k \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant k$.

En multipliant cette inégalité par $b-a$, qui est strictement positif, on a alors $-k(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant k(b-a)$.

Puisque k et $b-a$ sont positifs, on a alors $|f(b)-f(a)| \leqslant k(b-a)$ soit, puisque $b-a \geqslant 0$,

$$|f(b)-f(a)| \leqslant k|b-a|$$

□

♥ **Méthode 2 :** L'inégalité des accroissements finis est utilisée dans l'étude de suites récurrentes. La méthode donnée dans l'exemple suivant est un classique à maîtriser absolument !

■ **Exemple 26 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

Puisque f est définie sur $\mathbb{R}$, la suite (u_n) est bien définie.

- **Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, noté α, puis que $\alpha \in [0;1]$.**

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - x$.

Par somme de limites, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

Par ailleurs, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $g'(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Puisque g est également continue sur $\mathbb{R}$, alors, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on note α.

Or, si $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = x$.

$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution réelle.}}$

Par ailleurs, $g(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ et $g(1) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$. $\boxed{\text{Ainsi, } \alpha \in [0;1].}$

- **Montrons que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.**
  Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ».
  - **Initialisation** : on a $u_0 = 0$ et on a donc bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

    On a alors $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et donc $0 \geqslant -u_n \geqslant -1$.

    On applique alors la fonction exponentielle qui est croissante sur $[-1;0]$.
    Ainsi, $1 \geqslant \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ puis $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u_n} \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$.

    Ainsi, on a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - **Conclusion** : Par récurrence, on a montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, , 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$.

- **Montrons que pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.**

Pour tout réel x, on a $f'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

Or, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \geqslant -x \geqslant -1$ puis, par croissance de la fonction exponentielle sur $[-1;0]$, on a $1 \geqslant \mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ et donc $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$.

Ainsi, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $\frac{1}{2} \geqslant f'(x) \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \geqslant 0$ et donc $\boxed{|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}}$.

- **Montrons que pour tout entier naturel n, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.**

C'est ici que la formulation de la question doit faire penser à l'inégalité des accroissements finis.

- La fonction f est dérivable sur $[0;1]$;
- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

Puisque pour tout entier naturel n, on a $u_n \in [0;1]$ mais également $\alpha \in [0;1]$, alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

Or, $f(\alpha) = \alpha$ et, pour tout entier naturel n, $f(u_n) = u_{n+1}$. On a donc montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.}$$

- **Montrons que pour tout entier naturel n, on a $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.**
  Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».
  - **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.
    Or, $\alpha \in [0;1]$ et donc $|u_0 - \alpha| = |\alpha| \leqslant 1$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
  - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

    Or, d'après le point précédent, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

    Ainsi, par hypothèse de récurrence, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

    $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
  - **Conclusion** : Par récurrence, on a montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

- **Montrons que la suite (u_n) converge et déterminons sa limite.**

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $|u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donc $-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant u_n-\alpha \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or, puisque $-1<\frac{1}{2}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, $(u_n-\alpha)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-\alpha)=0$.

Or, pour tout entier naturel n, $u_n=(u_n-\alpha)+\alpha$.
Par opérations sur les suites convergentes, on en déduit que (u_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

6 Dérivée et variations

Le théorème des accroissements finis nous permet de démontrer un résultat bien connu...

Théorème 19 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- La fonction f est **constante** sur I si et seulement si, pour tout $x\in I$, on a $f'(x)=0$;
- La fonction f est **croissante** sur I si et seulement si, pour tout $x\in I$, on a $f'(x)\geqslant 0$;
- La fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si, pour tout $x\in I$, on a $f'(x)\leqslant 0$;
- Si pour tout $x\in I$, on a $f'(x)\geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante sur I ;
- Si pour tout $x\in I$, on a $f'(x)\leqslant 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration 20 : $\boxed{\Longrightarrow}$ **Supposons que f est constante sur I.**

Soit $x\in I$ et $h\neq 0$ tel que $x+h\in I$. Alors $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ et donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$.

f est donc dérivable en x et $f'(x)=0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ **Réciproquement, supposons que pour tout $x\in I$, on a $f'(x)=0$.**

Soit donc a et b dans I avec $a<b$. Puisque f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)=0$ et donc $f(b)=f(a)$.

□

Démonstration 21 : $\boxed{\Longrightarrow}$ **Supposons que f est croissante sur I.**

Soit $x\in I$ et $h>0$ tel que $x+h\in I$. Alors $f(x+h)\geqslant f(x)$ et donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0$.

Puisque f est dérivable en x, on peut passer à la limite et on a alors $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0$ soit $f'_d(x)\geqslant 0$.

De même, on montre que $f'_g(x)\geqslant 0$ et on a donc $f'(x)\geqslant 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ **Réciproquement, supposons que pour tout $x\in I$, on a $f'(x)\geqslant 0$.**

Soit donc a et b dans I avec $a<b$. Puisque f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\geqslant 0$.

Or, $b-a\geqslant 0$. Ainsi, $f(b)-f(a)\geqslant 0$ soit $f(a)\leqslant f(b)$. f est donc croissante sur I.

□

Démonstration 22 : Supposons que pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \leqslant 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois.

D'après le point précédent, f est croissante sur I. Soit alors a et b dans I tels que $a < b$. On a alors $f(a) \leqslant f(b)$.

Supposons que $f(a) = f(b)$. Puisque la fonction f est croissante sur $[a;b]$, on aurait alors que, pour tout $c \in]a;b[$, $f(a) \leqslant f(c) \leqslant f(b)$ et donc la fonction f serait constante sur $[a;b]$. Ainsi, pour tout $c \in [a;b]$, on aurait $f'(c) = 0$ et la fonction f' s'annulerait un nombre infini de fois.

Par contraposée, si f' s'annule seulement un nombre fini de fois, alors on n'a pas $f(a) = f(b)$.
Il en vient que $f(a) < f(b)$. La fonction f est donc strictement croissante sur I. □