

# Dérivabilité

## 1 Nombre dérivé, fonction dérivée

### ► Exercice 1 – Voir le corrigé

Dans chaque cas, déterminer si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ .

$$f : x \mapsto \frac{x}{1 + |x|} \text{ en } a = 0.$$

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases} \text{ en } a = 1.$$

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x-2)^2 & \text{si } x \geq 2 \\ x-2 & \text{sinon} \end{cases} \text{ en } a = 2.$$

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ xe^{-1/x} & \text{sinon} \end{cases} \text{ en } a = 0.$$

### ► Exercice 2 – Voir le corrigé

En reconnaissant un taux de variation, déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

### ► Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère la fonction  $f : x \mapsto x^{1/x}$ , définie sur  $]0; +\infty[$ .

1. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que le prolongement ainsi obtenu est dérivable en 0.

### ► Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
3. Exprimer alors  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  puis montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. La fonction  $f$  est-elle deux fois dérivable en 0 ?

### ► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la fonction  $f : x \mapsto xe^x$ . Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et exprimer  $f_n(x)$  pour tout réel  $x$ .

### ► Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x > 0$ .
3. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
4. Construire le tableau de variations de  $f$ .
5. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$  puis montrer que  $\alpha \in [\sqrt{2}; 2]$ .

### ► Exercice 7 – Voir le corrigé

On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x \neq 0$  par  $f(x) = x \exp\left(-\frac{3}{|x|}\right)$ .

1. Étudier la parité de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que le prolongement ainsi obtenu est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer que le prolongement ainsi obtenu est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

### ► Exercice 8 – Ecricome 2014 légèrement revu – Voir le corrigé

On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x \geq 0$  par  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = e$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Déterminer le signe de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ . En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  existe.
2. Écrire une fonction Python `u(n)` qui renvoie la valeur de  $u_n$ .
3. Montrer que  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .
4. (a) Montrer que pour tout  $x \geq 0$ , on a  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .  
(b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ .  
(c) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$ .
5. (a) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0; +\infty[$  et exprimer  $f'(x)$  pour tout réel  $x > 0$ .  
(b) Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a

$$f'(x) = \frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{1+x}}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2}.$$

- (c) Justifier que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; +\infty[$ .
6. Montrer que pour tout  $x \geq e - 1$ , on a  $f(x) \leq x$  et  $(x+1) \ln(x+1) \geq x+1$ .  
En déduire que pour tout  $x \geq e - 1$ , on a  $f'(x) \geq 0$ .
7. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $e - 1 \leq u_n$ .
8. Établir que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

## 2 Inégalité des accroissements finis

### ► Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère la fonction  $f : x \mapsto 2 - \frac{1}{2} \ln(x)$ , définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On la note  $\alpha$ .
2. Montrer que  $\alpha \in [1; e]$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \in [1; e]$ .
4. Montrer que pour tout  $x \in [1; e]$ , on a  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
5. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ .
6. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $|u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}$ .
7. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

► **Exercice 10 – Voir le corrigé**

On considère la fonction  $h$  définie pour tout réel  $x$  par  $h(x) = e^{-x} + 1$ .

1. Étudier les variations de  $h$ .
2. Montrer que pour tout réel  $x \in [1; 2]$ , on a  $h(x) \in [1; 2]$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = h(u_n)$ .

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \in [1; 2]$ .
4. Montrer que pour tout réel  $x \in [1; 2]$ , on a  $|h'(x)| \leq \frac{1}{e}$ .
5. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$ .
6. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $|u_n - \alpha| \leq e^{-n}$ .
7. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

► **Exercice 11 – Voir le corrigé**

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = e^{-x^2}$ .

1. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ . On la note  $\alpha$ .
2. Justifier que  $\alpha \in [0; 1]$ .
3. Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq u_n \leq 1$ .
5. En étudiant les variations de  $f'$ , montrer que pour tout réel  $x \in [0; 1]$ , on a  $|f'(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{e}}$ .
6. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \sqrt{\frac{2}{e}} |u_n - \alpha|$ .
7. Justifier que  $\sqrt{\frac{2}{e}} < 1$ .
8. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

► **Exercice 12 – Voir le corrigé**

On considère la fonction  $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$  et déterminer ses variations sur cet ensemble de définition.
2. Montrer que  $f'$  est décroissante sur  $[2; +\infty[$ .
3. Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 2.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis pour  $f$  entre  $k$  et  $k+1$ , montrer que

$$f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k \ln(k)}.$$

4. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$ .

► **Exercice 13 – Voir le corrigé**

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2}$ .

1. Déterminer le sens de variations de  $(S_n)$ .
2. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur la fonction  $f : x \mapsto -\frac{1}{x}$  entre  $k$  et  $k+1$ , montrer que pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 1, on a

$$f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k^2}$$

3. En déduire que  $(S_n)$  est majorée. Que peut-on en conclure ?

### 3 Exercices théoriques

► **Exercice 14 – Voir le corrigé**

Soit  $f$  une application bijective de  $I$  sur  $J$  et dérivable sur  $I$ .

Soit  $y \in J$  tel que  $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ . Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en  $y$  et que  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ .

► **Exercice 15 – Voir le corrigé**

Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire.

Montrer que la dérivée d'une fonction impaire est paire.

► **Exercice 16 – Voir le corrigé**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que, si pour tout réel  $x$ , on a  $|f'(x)| \geq 1$ , alors  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .