

Variabes aléatoires finies

Dans tout le chapitre Ω désigne l'univers **fini** d'une expérience aléatoire.

1 Variable aléatoire

Définition 1 : On appelle variable aléatoire réelle toute fonction définie sur Ω d'une expérience aléatoire et à valeurs dans \mathbb{R} .

Les variables aléatoires sont en général notées X .

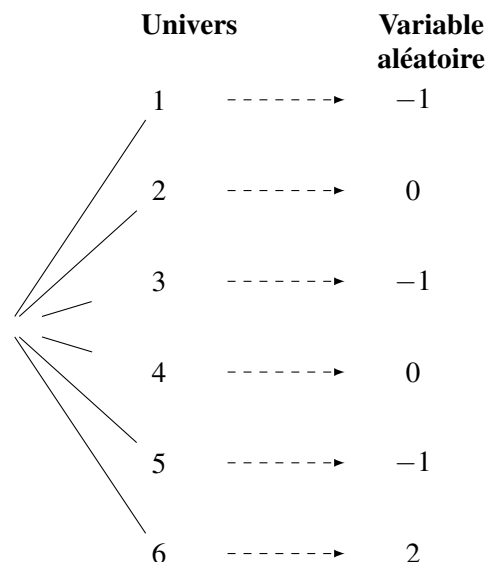
L'ensemble des valeurs prise par Ω (c'est-à-dire $X(\Omega)$) est appelé support de la variable aléatoire X .

■ **Exemple 1 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 6 compris. L'univers de l'expérience aléatoire est donc l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Si le nombre obtenu est 6, on gagne 2 points. Si le nombre est impair, on perd 1 point. Dans les autres cas, on ne gagne ni ne perd aucun point.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés selon le résultat.

- On a $X(\Omega) = \{-1; 0; 2\}$.
- Si on obtient le nombre 1, on perd 1 point.
On a ainsi $X(1) = -1$.
- Si on obtient le nombre 6, on gagne 2 points.
On a ainsi $X(6) = 2$.
- On a également $X(2) = 0, X(3) = -1, X(4) = 0$ et $X(5) = -1$.



Définition 2 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω fini et a un réel.

On note $[X = a]$ l'événement qui regroupe toutes les issues ω de Ω telle que $X(\omega) = a$.

$$[X = a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$$

On peut définir de la même manière les événements $[X < a], [X \leq a], [X \geq a], [X \in I] \dots$

■ **Exemple 2 :** On reprend l'exemple précédent.

- L'événement $[X = -1]$ correspond aux issues qui font perdre un point, soit les issues 1, 3 et 5.
- L'événement $[X \geq 0]$ correspond aux issues qui font gagner 0 point ou plus, soit les issues 2, 4 et 6.

Propriété 1 : Soit X une variable aléatoire finie.

La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Ce système complet d'événements est utile pour appliquer la formule des probabilités totales.

2 Loi d'une variable aléatoire

2.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 3 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini Ω .

La loi de probabilité de X est la fonction qui, à chaque réel $x \in X(\Omega)$, associe la probabilité $\mathbb{P}([X = x])$.

Propriété 2 : Soit X une variable aléatoire finie. On a $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$.

Démonstration 1 : Il suffit de noter que la famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. \square



Méthode 1 : Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire finie X ...

- On détermine l'ensemble $X(\Omega)$;
- On écrit chaque événement $[X = x]$ pour $x \in X(\Omega)$;
- On calcule $\mathbb{P}([X = x])$ pour $x \in X(\Omega)$.

■ **Exemple 3 :** On choisit uniformément au hasard un nombre entier entre 1 et 8 compris.

- Si le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6, on gagne 2 points.
- Si le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4, on perd 3 points.
- Si le nombre obtenu est 5, on gagne 5 points.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés après l'expérience.

On a alors $X(\Omega) = \{-2; 3; 5\}$. Pour déterminer la loi de X , il faut donc déterminer $\mathbb{P}([X = -3])$, $\mathbb{P}([X = 2])$ et $\mathbb{P}([X = 5])$.

- On a $[X = -3] = \{1; 2; 3; 4\}$. Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}([X = -3]) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
- On a $[X = 2] = \{6; 7; 8\}$. Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{3}{8}$.
- On a $[X = 5] = \{5\}$. Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}([X = 5]) = \frac{1}{8}$.

On peut résumer la loi de la variable aléatoire X dans un tableau.

x	-3	2	5
$\mathbb{P}([X = x])$	1/2	3/8	1/8

Remarque : on vérifie alors que la somme des probabilités obtenues vaut bien 1 !

■ **Exemple 4 :** On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier PILE. On convient que X prend la valeur 0 si aucun PILE n'apparaît.

Si l'on note P pour PILE et F pour FACE, on a alors $\Omega = \{P; F\}^3$ et $X(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$. Par ailleurs,

- $[X = 0] = \{(F; F; F)\}$;
- $[X = 1] = \{(P; F; F), (P; F; P), (P; P; F), (P; P; P)\}$;
- $[X = 2] = \{(F; P; F), (F; P; P)\}$;
- $[X = 3] = \{(F; F; P)\}$

Puisque toutes les issues sont équiprobables, on en déduit la loi de X .

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}([X = x])$	1/8	1/2	1/4	1/8

On peut aussi procéder autrement. Pour $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, on note P_k l'événement « obtenir PILE au lancer k ».

- $[X = 1] = P_1$. Ainsi, $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{2}$.
- $[X = 2] = \overline{P_1} \cap P_2$. Ainsi, $\mathbb{P}([X = 2]) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap P_2) \underset{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(\overline{P_1})\mathbb{P}(P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- $[X = 3] = \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3$. Ainsi, $\mathbb{P}([X = 3]) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3) \underset{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(\overline{P_1})\mathbb{P}(\overline{P_2})\mathbb{P}(P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
- $[X = 0] = \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}$. Ainsi, $\mathbb{P}([X = 0]) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}) \underset{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(\overline{P_1})\mathbb{P}(\overline{P_2})\mathbb{P}(\overline{P_3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

2.2 Transfert de variable aléatoire

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs réelles. On définit la variable aléatoire $g(X)$ par

$$g(X) : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto g(X(\omega)) \end{cases}$$

■ **Exemple 5 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée ci-dessous.

x	-3	-1	1	2
$\mathbb{P}([X = x])$	1/6	1/2	1/4	1/12

On a alors $X(\Omega) = \{-3; -1; 1; 2\}$. On considère alors la variable aléatoire Y définie par $Y = X^2$. On a alors $Y(\Omega) = \{1; 4; 9\}$. Par ailleurs,

- $\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}([X^2 = 1]) = \mathbb{P}([X = 1] \cup [X = -1]) \underset{\text{incompatibles}}{=} \mathbb{P}([X = 1]) + \mathbb{P}([X = -1]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
- $\mathbb{P}([Y = 4]) = \mathbb{P}([X^2 = 4]) = \mathbb{P}([X = 2] \cup [X = -2]) \underset{\text{incompatibles}}{=} \mathbb{P}([X = 2]) + \mathbb{P}([X = -2]) = \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12}$.
- $\mathbb{P}([Y = 9]) = \mathbb{P}([X^2 = 9]) = \mathbb{P}([X = 3] \cup [X = -3]) \underset{\text{incompatibles}}{=} \mathbb{P}([X = 3]) + \mathbb{P}([X = -3]) = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

La loi de Y peut donc être résumée par le tableau suivant

y	1	4	9
$\mathbb{P}([Y = y])$	3/4	1/12	1/6

2.3 Fonction de répartition

Définition 5 : Soit X une variable aléatoire finie.

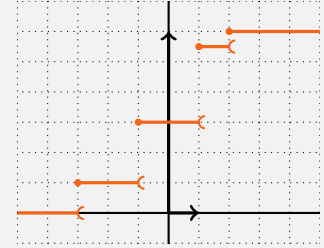
La fonction de répartition de X est la fonction notée F_X définie par

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow [0; 1] \\ x & \longmapsto \mathbb{P}([X \leq x]) \end{cases}$$

■ **Exemple 6** : On considère la variable aléatoire X dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

x	-3	-1	1	2
$\mathbb{P}([X = x])$	1/6	1/2	1/4	1/12

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on a alors } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ 1/6 & \text{si } x \in [-3; -1[\\ 2/3 & \text{si } x \in [-1; 1[\\ 11/12 & \text{si } x \in [1; 2[\\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$



Propriété 3 : Soit X et Y deux variables aléatoires finies.

Alors X et Y suivent la même loi si et seulement si $F_X = F_Y$.

3 Paramètres d'une variable aléatoire

3.1 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire finie. L'espérance de X , notée $E[X]$, est la valeur

$$E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}([X = x])$$

■ **Exemple 7** : On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-1	2	3	8
$\mathbb{P}(X = k)$	1/3	1/4	1/6	1/4

L'espérance de la variable aléatoire X vaut :

$$E[X] = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{4} \times 8 = \frac{8}{3}.$$

Propriété 4 : Soit m et M deux réels. Soit X une variable aléatoire telle que pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $m \leq x \leq M$.

Alors on a $m \leq E[X] \leq M$.

Démonstration 2 : Soit $x \in X(\Omega)$. On a alors $m \leq x \leq M$. En multipliant cette inégalité par $\mathbb{P}([X = x])$ qui est positive, on obtient

$$m \times \mathbb{P}([X = x]) \leq x \times \mathbb{P}([X = x]) \leq M \times \mathbb{P}([X = x]).$$

Cette inégalité étant vraie pour tout les $x \in X(\Omega)$, on peut sommer sur toutes ces valeurs. On a donc

$$\sum_{x \in X(\Omega)} m \mathbb{P}([X = x]) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x]) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} M \mathbb{P}([X = x])$$

soit

$$m \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x]) \leq M \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x])$$

Or, $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$. Ainsi, on a bien

$$m \leq E[X] \leq M.$$

□

Théorème 3 — Formule de transfert : Soit X une variable aléatoire finie et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.

On a alors

$$E[g(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}([X = x]).$$

On peut donc calculer l'espérance de toute variable aléatoire obtenue à partir de X en connaissant uniquement la loi de X . On retiendra notamment les cas particuliers suivants.



Propriété 5 : Soit X une variable aléatoire finie. Alors

- Pour tous réels a et b ,

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

- On a

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x]).$$

■ **Exemple 8 :** On reprend la variable aléatoire précédente, pour laquelle on avait trouvé $E[X] = \frac{8}{3}$.

k	-1	2	3	8
$\mathbb{P}(X = k)$	1/3	1/4	1/6	1/4

On a alors $E[3X + 5] = 3E[X] + 5 = 3 \times \frac{8}{3} + 5 = 13$.

Par ailleurs,

$$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 8^2 \times \frac{1}{4} = \frac{113}{6}.$$

3.2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X . La variance X , notée $V(X)$, est la valeur

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E[X])^2 \times \mathbb{P}([X = x]).$$

Théorème 4 — Formule de König-Huygens : Soit X une variable aléatoire. On a alors

$$V(X) = E(X^2) - (E[X])^2.$$

Démonstration 5 : On a en effet $(X - E[X])^2 = X^2 - 2XE[X] + E[X]^2$. Ainsi, puisque $E[X]$ est une constante, on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E(X^2) - E[2XE[X]] + E(X^2) \\ &= E(X^2) - 2E[X]E[X] + E(X^2) \\ &= E(X^2) - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\ &= E(X^2) - E[X]^2. \end{aligned}$$

□

Remarque : la quantité $E(X^2)$ est naturellement calculée à l'aide de la formule de transfert.

■ **Exemple 9 :** On reprend la variable aléatoire X précédente.

k	-1	2	3	8
$\mathbb{P}(X = k)$	1/3	1/4	1/6	1/4

On avait montrée que $E[X] = \frac{8}{3}$ et $E(X^2) = \frac{113}{6}$.

$$\text{Ainsi, } V(X) = E(X^2) - E[X]^2 = \frac{113}{6} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{113}{6} - \frac{64}{9} = \frac{211}{18}.$$

Propriété 6 : Soit X une variable aléatoire finie. Alors $V(X) = 0$ si et seulement si il existe un réel a tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Définition 8 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle écart-type de X , noté $\sigma(X)$ (sigma), la valeur

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

L'écart-type mesure la "variation moyenne" de la variable aléatoire autour de l'espérance.

Propriété 7 : Pour tous réels a et b , on a

$$V(aX + b) = a^2V(X) \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

3.3 Variable aléatoire centrée réduite

Définition 9 : Soit X une variable aléatoire finie. On dit que X est centrée et réduite si $E[X] = 0$ et $V(X) = 1$.

Propriété 8 : Soit X une variable aléatoire finie non constante.

Alors la variable aléatoire X^* définie par $X^* = \frac{X - E[X]}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Démonstration 6 : On a en effet

$$E[X^*] = \frac{1}{\sigma(X)} E[X - E[X]] = \frac{1}{\sigma(X)} (E[X] - E[X]) = 0$$

et

$$V(X^*) = \frac{1}{\sigma(X)^2} V(X - E[X]) = \frac{1}{V(X)} \times V(X) = 1.$$

□

4 Variables aléatoires finies usuelles

4.1 Loi certaine

Définition 10 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire finie sur Ω .

On dit que X suit la loi certaine de paramètre a si

- $X(\Omega) = \{a\}$;
- $\mathbb{P}([X = a]) = 1$.

Propriété 9 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi certaine de paramètre a . Alors,

$$E[X] = a \quad V(X) = 0 \quad \sigma(X) = 0$$

Démonstration 7 : On a en effet $E(X) = a \times \mathbb{P}([X = a]) = a \times 1 = a$.

De plus, $V(X) = (a - E(X))^2 \times \mathbb{P}([X = a]) = (a - a)^2 \times 1 = 0$

□

4.2 Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

Définition 11 : Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire finie sur Ω .

On dit que X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ si :

- $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Cela correspond à une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Propriété 10 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Démonstration 8 : On a en effet

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{x=1}^n x \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n x = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Par ailleurs, d'après la formule de transfert, on a

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{x=1}^n x^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n x^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ainsi, d'après la formule de König-Huygens, on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = (n+1) \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4}\right)$$

Ainsi,

$$V(X) = (n+1) \times \frac{4n+2 - (3n+3)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}.$$

□

En PYTHON, la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut-être simulée à l'aide de la fonction `randint` du module `numpy.random`.

<code>rd.randint(a, b)</code>	génère un entier aléatoire entre a inclus et b exclu.
<code>rd.randint(a, b)</code>	génère un tableau de n entiers aléatoires entre a inclus et b exclu.

4.3 Loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$

Définition 12 : Soit a et b deux entiers naturels avec $0 < a < b$. Soit X une variable aléatoire finie sur Ω .

On dit que X suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$ si :

- $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{b-a+1}$

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$. Cela correspond à une loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.

Propriété 11 : Soit a et b deux entiers naturels avec $0 < a < b$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$, alors $(X - a + 1) \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; b - a + 1 \rrbracket)$.

Démonstration 9 : Notons $Y = X - a + 1$. Puisque $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$, alors $Y(\Omega) = \llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket$.

Par ailleurs, pour tout entier naturel $y \in \llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket$, on a alors

$$\mathbb{P}([Y = y]) = \mathbb{P}([X - a + 1 = y]) = \mathbb{P}(X = y + a - 1) = \frac{1}{b - a + 1}$$

□

Propriété 12 : Soit a et b deux entiers naturels avec $0 < a < b$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$. Alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(x) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Démonstration 10 : On note $Y = X - a + 1$. D'après la propriété précédente, on a $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket)$.

On a donc $E(Y) = \frac{b-a+1+1}{2} = \frac{b-a+2}{2}$ et $V(Y) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$.

Ainsi, $E(X) = E(Y + a - 1) = E(Y) + a - 1 = \frac{b-a+2}{2} + a - 1 = \frac{a+b}{2}$ et

$$V(X) = V(Y + a - 1) = V(Y) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}.$$

□

Remarque : le résultat précédent est à retrouver systématiquement.

4.4 Loi de Bernoulli de paramètre p

Définition 13 : Soit $p \in [0; 1]$ et X une variable aléatoire finie.

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$;
- $\mathbb{P}([X = 1]) = p$ et $\mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Cette loi modélise les situations dans lesquelles il n'y a que deux issues possibles, l'une d'entre elles étant considérée comme le succès (qui correspond au cas où $[X = 1]$) et l'autre étant l'échec (qui correspond au cas $[X = 0]$).

Propriété 13 : Soit $p \in [0; 1]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Alors

$$E(X) = p \quad V(X) = 1 - p$$

Démonstration 11 : On a en effet

$$E(X) = 0 \times \mathbb{P}([X = 0]) + 1 \times \mathbb{P}([X = 1]) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p.$$

Par ailleurs,

$$E(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}([X = 0]) + 1^2 \times \mathbb{P}([X = 1]) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p.$$

Ainsi, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

□

Propriété 14 : Soit A un événement. On considère la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$. En particulier, $E[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration 12 : Il suffit de remarquer que $[X = 1] = A$.

□

4.5 Loi binomiale

Définition 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. Soit X une variable aléatoire finie.

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) si

- $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$;
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration 13 : Vérifions que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité. On a en effet, d'après la formule du binôme de Newton

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + (1 - p))^n = 1.$$

□

Définition 15 : Soit n un entier naturel non nul et $p \in [0; 1]$

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues : le succès S , de probabilité p , et l'échec \bar{S} , de probabilité $1 - p$.

Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est une succession de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, chacune de paramètre p .

Propriété 15 — Loi binomiale : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$.

On considère un schéma de Bernoulli à n épreuves de paramètre p . On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli.

Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.



Méthode 2 : Pour justifier qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale, on a deux options :

- on détermine son support et sa loi par le calcul ;
- on justifie soigneusement que X compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli

■ **Exemple 10 :** On lance 10 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre de fois où la face 5 a été obtenue.

Les lancers étant identiques et indépendants, X compte donc le nombre de succès (obtenir 5) d'un schéma de Bernoulli à 10 épreuves. Pour chaque épreuve, la probabilité de succès est de $\frac{1}{6}$. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; \frac{1}{6})$.

■ **Exemple 11 :** On dispose d'une urne opaque contenant r boules rouges et b boules bleues. On tire n boules dans cette urne en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On note X le nombre de boules rouges tirées.

Puisque les tirages s'effectuent avec remise, ceux-ci sont identiques et indépendants. X compte donc le nombre de succès (la boule tirée est rouge) dans un schéma de Bernoulli à n épreuves. Pour chaque épreuve, la probabilité de succès est de $\frac{r}{b+r}$.

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{r}{b+r})$.

Propriété 16 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$$

Démonstration 14 : Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrons que l'on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. En effet,

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Ainsi,

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{le premier terme vaut } 0)$$

En utilisant la formule précédente, on a donc

$$E(X) = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

On effectue le changement de variable $j = k - 1$. On a alors

$$E(X) = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-(j+1)} = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton, on a

$$E(X) = np(p + (1-p))^{n-1} = np$$

Par ailleurs, si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a alors

$$k(k-1) \binom{n}{k} = (k-1)n \binom{n-1}{k-1} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

En remarquant que $k^2 = k(k-1) + k$, on a alors

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ainsi,

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La deuxième somme n'est autre que $E(X)$, et vaut donc np . Pour la première somme, remarquons que ses deux premiers termes sont égaux à 0. Par ailleurs,

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}$$

En posant alors $j = k - 2$, on a alors

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^2 p^j (1-p)^{n-(j+2)} = n(n-1) p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{n-2+j}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a donc

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1) p^2 (p + (1-p))^{n-2} = n(n-1) p^2.$$

Ainsi,

$$E(X^2) = n(n-1) p^2 + np.$$

D'après la formule de König-Huygens, on a donc

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = n(n-1) p^2 + np - (np)^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p).$$

□

En PYTHON, la loi binomiale de paramètres (n, p) peut-être simulée à l'aide de la fonction `binomial` du module `numpy.random`.

<code>rd.binomial(n, p)</code>	simule une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$
<code>rbinomial(n, p, b)</code>	génère un tableau de b entiers générés selon une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Distribution de la loi Binomiale $B(n, p)$ avec $n = 10$

