Variables aléatoires finies

1 Loi d'une variable aléatoire

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée dans un tableau.

k	-2	0	3	4
$\mathbb{P}([X=k])$	0.1	0.3	p	0.2

1. Déterminer la valeur du réel p pour que l'on ait effectivement une loi de probabilité.
2. Déterminer $\mathbb{P}([X \leqslant 3])$
3. Déterminer la fonction de répartition de X.

► Exercice 2 – Voir le corrigé

Une urne contient 8 boules rouges et 5 boules blanches. On effectue des tirages au hasard et sans remise d'une boule et on note X le rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X.
2. Recopier et compléter le programme suivant qui simule cette expérience aléatoire.

```python
import numpy.random as rd

liste_boules = []
for i in range(8):
    liste_boules.append("rouge")
for i in range(5):
    liste_boules.append(...)

total_boules = ...
boule_rouge_tiree = False
nombre_tirages = 0
while not bouge_rouge_tiree :
    numero_boule = ... # nombre au hasard entre 0 et total_boules-1
    couleur = liste_boules[numero_boule]
    total_boules = ...
    nombre_tirages = ...
    if couleur == "rouge":
        boule_rouge_tiree = ...
    del ...
print(nombre_tirages)
```

► Exercice 3 – Voir le corrigé

On lance deux dés cubiques équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Une urne contient 4 boules indiscernables numérotées de 1 à 4 ; on tire au hasard, successivement une boule de l'urne et à chaque tirage on retire les boules dont le numéro est inférieur ou égal au numéro tiré. X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne. Déterminer la loi de X.

2 Espérance, variance, écart-type

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Un sac contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On effectue deux tirages avec remise et on note X la somme des deux numéros tirés.

1. Donner l'univers Ω de cette expérience aléatoires puis $X(\Omega)$.
2. Donner la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X.

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit p et q deux réels. On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

k	1	3	5	10
$\mathbb{P}([X=k])$	0.1	p	q	0.2

Déterminer les valeurs de p et q telles que l'espérance de X vaut 5.

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer l'espérance de Y.

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

Une urne contient n jetons ($n \geqslant 9$) indiscernables au toucher, dont sept sont noirs et les autres sont blancs. On tire successivement et sans remise deux jetons de cette urne et on note X la variable aléatoire indiquant le nombre de couleurs différentes obtenues lors du tirage. Déterminer la valeur de n pour laquelle l'espérance de X est maximale.

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.
   Calculer la probabilité de perdre 9 euros sur une partie.
2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.
   (a) Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
   Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
   (b) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur (c'est-à-dire $E(X) > 0$).
   (c) Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de $0,05$.

On possède un test de dépistage de cette maladie. On considère un échantillon de n personnes ($n > 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.

On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange. Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Justifier que X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Justifier que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 0.95^n$.
3. Que représente l'espérance de X_n dans ce cadre ? Montrer que $E(X_n) = n+1-n\times 0,95^n$.
4. On considère la fonction f définie sur $[20;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0,95)$.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[20;+\infty[$.
   On la note α et on admet que $87 < \alpha < 87,1$.
   (b) Déterminer le signe de f sur $[20;+\infty[$.
5. On cherche à comparer deux types de dépistages. La première méthode est décrite dans cet exercice, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus. La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$. En utilisant les questions précédentes, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[\![0,N]\!]$. Démontrer que $E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > n)$.

3 Lois usuelles

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit $p \in]0;1[$.
On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{-1,1\}$, $\mathbb{P}([X=1]) = p$ et $\mathbb{P}([X=-1]) = 1-p$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. On pose $Y = \dfrac{1+X}{2}$. Quelle est la loi de Y ?
3. On pose $Z = \dfrac{1-X}{2}$. Quelle est la loi de Z ?

▶ Exercice 13 – Voir le corrigé

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k comporte k boules numérotées de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Pour $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, que vaut $\mathbb{P}_{X=k}(Y=i)$?
3. Déterminer la loi de Y.
4. Déterminer l'espérance de Y.

▶ Exercice 14 – Voir le corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y = n - X$. Quelle est la loi de Y ?

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

1. Soit $Y = 2^X$. Calculer l'espérance de Y.
2. Soit $k \in [\![0;n]\!]$.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$.
   (b) On pose $Z = \dfrac{1}{X+1}$. Calculer l'espérance de Z.

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Une urne contient un très grand nombre de boules rouges et de boules noires, indiscernables au toucher. On note p la proportion de boules rouges dans cette urne. On tire 20 fois, et avec remise, une boule dans cette urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

On effectue un tel tirage et on obtient alors 5 boules rouges. À partir de cette information, on souhaite déterminer le nombre de boules rouges dans l'urne en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance : cette méthode consiste à déterminer la valeur de la proportion p pour laquelle la probabilité $\mathbb{P}(X=5)$ est maximale.

2. Exprimer $\mathbb{P}(X=5)$ en fonction de p.
3. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on note $f(x) = x^5(1-x)^{15}$.
   Montrer que f admet un maximum sur $[0;1]$ en une valeur que l'on précisera.
4. Conclure à l'aide des résultats précédents.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On considère une urne contenant initialement une boule rouge et une boule noire et on procède à l'expérience suivante : on effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et après chaque tirage, on replace dans l'urne la boule tirée en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur que la boule obtenue.

On note X_n la variable aléatoire aléatoire donnant le nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Quel est le support de la variable aléatoire X_n ?
2. Compléter le programme suivant qui simule l'expérience aléatoire donnée.

```python
import numpy.random as rd

liste_boules = ["rouge", "noire"]
total_boules = 2
total_rouges_tirees = 0
for i in range(n):
    tirage = ... #numero au hasard entre 0 et total_boules - 1
    couleur = liste_boules[ ... ]
    if couleur == "rouge" :
        liste_boules.append(...)
        total_boules = ...
        total_rouge_tirees = ...
    else :
        ...
        ...
print(...)
```

3. Déterminer la loi de X_1 et la loi de X_2.
4. Démontrer, en raisonnant par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.
   Indication : on utilisera la formule des probabilités totales en distinguant les valeurs prises par X_n.

► Exercice 18 Ecricome 2022 (début) – Voir le corrigé

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et de n jetons.

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n jetons.

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Justifier que X_n, Y_n, Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
3. Justifier que $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.
4. Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ et $[Z_n = 0]$.
5. En déduire que $P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

► Exercice 19 ESC 2009 – Voir le corrigé

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0;1[$ et de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, l'urne numéro k contient k boules vertes et $n-k$ boules rouges.

On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : on lance n fois la pièce puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu.

Par exemple si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne 4.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
   Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
   (b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.
2. (a) Calculer $P_{[X=0]}(Y = 0)$ et $P_{[X=n]}(Y = 0)$.
   (b) Justifier que pour tout k de $\{0, \dots, n\}$: $P_{[X=k]}(Y = 1) = \frac{k}{n}$.
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$, que :
   $$P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}.$$
   (d) Déterminer la loi de Y et son espérance.

► Exercice 20 ESSEC 2004 modifié – Voir le corrigé

Partie 1 : Calcul matriciel

Pour tout réel a, on considère les matrices

$$M(a)=\begin{pmatrix}1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3\\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2\\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a)\\ 0 & 0 & 0 & a^3\end{pmatrix}\quad D(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a^3\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2 et donner l'inverse de P.
2. Vérifier que : $\forall a\in\mathbb{R},\ M(a)=PD(a)P^{-1}$.
3. Montrer que : $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ M(a)M(b)=M(ab)$. En déduire : $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ [M(a)]^n=M(a^n)$.
4. Comment choisir $c\in\mathbb{R}$ pour que $M(c)=I_4$?

5. Montrer que si $a\neq 0$, alors la matrice $M(a)$ est inversible.
6. La matrice $M(0)$ est elle inversible ?

Partie 2 : Étude d'une expérience aléatoire

On dispose de 3 pièces de monnaie, chacune ayant la probabilité p d'amener pile ($0<p<1$) et $1-p$ d'amener face. On pourra poser : $q=1-p$. On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les 3 pièces ;
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 1 (s'il en existe) ;
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 2 (s'il en existe),
- à l'étape 4, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 3 (s'il en existe),

et ainsi de suite.

À chaque étape, les lancers des pièces sont supposés indépendants. On note X_n le nombre de pièces tombées sur Pile à l'étape n.

On pose les deux conventions suivantes

- L'événement $[X_0=3]$ est l'événement certain et les événements $[X_0=0]$, $[X_0=1]$ et $[X_0=2]$ sont impossibles ;
- si à une certaine étape n_0, aucun côté pile n'apparaît, on considère que pour tout les entiers n supérieurs ou égaux à n_0, l'événement $[X_n=0]$ est réalisé.

7. Reconnaître la loi de X_1.
8. Soit $n\in\mathbb{N}$. En considérant le système complet d'événements $([X_n=x])_{x\in[\![0,3]\!]}$, exprimer $\mathbb{P}([X_{n+1}=0]$ en fonction de $\mathbb{P}([X_n=0])$, $\mathbb{P}([X_n=1])$, $\mathbb{P}([X_n=2])$ et $\mathbb{P}([X_n=3])$.
9. Faire de même pour $\mathbb{P}([X_{n+1}=1]$, $\mathbb{P}([X_{n+1}=2]$ et $\mathbb{P}([X_{n+1}=3]$.
10. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n=\begin{pmatrix}\mathbb{P}([X_n=0])\\ \mathbb{P}([X_n=1])\\ \mathbb{P}([X_n=2])\\ \mathbb{P}([X_n=3])\end{pmatrix}$.
    (a) Déterminer une matrice M telle que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1}=MU_n$.
    (b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $U_n=M^nU_0$.
    (c) Déterminer les coefficients de U_n pour tout entier naturel n ainsi que leurs limites en $+\infty$. Comment interpréter ce résultat ?