

Séries numériques

1 Série numérique : premiers exemples

1.1 Notion de série

Définition 1 : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle. Pour tout entier naturel $N \geq n_0$, on note $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$.

La suite $(S_N)_{N \geq n_0}$, également notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ (ou $\sum u_n$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), est appelée **série de terme général** u_n . Le terme de rang N de cette série est également appelé **somme partielle** de la série.

■ **Exemple 1 :** Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{1}{n+1}$. On considère la série de terme général u_n et on note S_N sa N -ième somme partielle. On a alors

- $S_0 = \sum_{n=0}^0 u_n = u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$;
- $S_1 = \sum_{n=0}^1 u_n = u_0 + u_1 = \frac{1}{0+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$;
- $S_2 = \sum_{n=0}^2 u_n = u_0 + u_1 + u_2 = \frac{1}{0+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} = \frac{11}{6} \dots$

1.2 Série convergente

Définition 2 : On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles (S_N) converge.

On notera alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^N u_n$, que l'on appellera **somme** de cette série.

Dans le cas contraire, on dira que la série est **divergente**.

Remarque importante : La notation $\sum u_n$ désigne la série de terme général. Il s'agit donc d'une suite de réels (en l'occurrence, la suite des sommes partielles), cette notation a donc toujours un sens.

En revanche, la notation $\sum_{n=0}^{+\infty}$ désigne la somme de la série, c'est-à-dire la limite des sommes partielles : avant d'utiliser cette notation, il est donc indispensable d'établir qu'une telle limite existe.



Méthode 1 : Pour déterminer la nature d'une série (convergente ou divergente) et calculer son éventuelle somme, on peut

- calculer, pour tout entier naturel N , la somme partielle S_N .
- étudier la limite de (S_N) en $+\infty$.

Il faut donc connaître ses résultats et méthodes sur les calculs de sommes (sommes usuelles, changement d'indice, sommes télescopiques...).

■ **Exemple 2** : On considère la série $\sum n$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^N n = \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi, la série $\sum n$ diverge.

■ **Exemple 3** : On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a alors $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.

On reconnaît alors une somme télescopique. On a donc $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

■ **Exemple 4** : On considère la série $\sum \frac{1}{2^n}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Propriété 1 : Soit n_0 et n_1 deux entiers naturels.

Alors les séries $\sum_{n \geq n_0}$ et $\sum_{n \geq n_1}$ sont de même nature. Autrement dit, on ne change pas la nature d'une série en lui retirant un nombre fini de termes.

En revanche, les sommes de ces deux séries sont différentes.

1.3 Combinaison linéaire de séries convergentes

Propriété 2 : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Soit λ et μ deux réels.

Alors $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration 1 : Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{n=0}^N (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^N u_n + \mu \sum_{n=0}^N v_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

□

2 Lien entre série et terme général

Il n'est malheureusement pas possible de calculer toutes les sommes partielles, la méthode précédente présente donc rapidement ses limites. Peut-on alors obtenir des informations sur la convergence d'une série en étudiant simplement son terme général ?

2.1 Condition nécessaire de convergence

Propriété 3 : Soit (u_n) une suite numérique.

Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration 2 : Supposons que $\sum u_n$ converge et notons S sa somme.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\sum_{n=0}^N u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n = u_N$.

Or, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n = S$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} u_n = S$. Ainsi, (u_n) converge et $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = S - S = 0$. \square

Remarque : On utilisera très souvent cette proposition dans son sens contraposé. Si (u_n) est une suite numérique qui ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dira même qu'elle diverge grossièrement.

■ **Exemple 5 :** La série de terme général $\frac{n}{n+1}$ diverge.

En effet, pour tout entier naturel n , $\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Il en vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

En particulier, $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et donc $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1}$ diverge.

■ **Exemple 6 :** ATTENTION ! LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !

Le cas classique : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2.2 Séries à termes positifs

Définition 3 : Soit $\sum u_n$ une série numérique.

On dit que $\sum u_n$ est une série à termes positifs si, pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 0$.

Propriété 4 : Soit $\sum u_n$ une série numérique à terme positifs. Alors la suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration 3 : Pour tout entier naturel N , on a

$$\sum_{n=0}^{N+1} u_n - \sum_{n=0}^N u_n = u_{N+1} \geq 0.$$

\square

Nous pouvons alors appliquer tous les résultats que nous connaissons sur les suites croissantes.

Propriété 5 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\left(\sum_{n=0}^N u_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ est majorée.

La proposition suivante en est une conséquence directe.

Théorème 4 — Théorème de comparaison sur les séries à termes positifs : Soit n_0 un entier naturel. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration 5 : Puisque la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, on peut supposer que $n_0 = 0$.

Supposons que $\sum v_n$ converge. Alors, d'après la propriété suivante, $\sum v_n$ est majorée : soit M un majorant de cette série.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq v_n$, alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n \leq M$.

La série $\sum u_n$ est donc majorée. Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, on en déduit que cette série converge.

Par contraposée, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge également. \square

3 Séries usuelles

3.1 Série géométrique et ses dérivées

Propriété 6 — Série géométrique et ses dérivées : Soit q un réel.

Les séries $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 0} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 0} n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $-1 < q < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Remarque : Puisque le premier terme de la deuxième somme vaut 0, il est possible de la commencer à $n = 1$. Pour la troisième somme, il est possible de commencer à $n = 2$.

Connaissant le résultat de la première somme, il est possible de retrouver les deux autres en dérivant. Ce sera d'ailleurs tout l'objet de la démonstration à venir.

Démonstration 6 : Soit q un réel.

- Si $q \leq -1$ ou $q \geq 1$, alors la suite (q^n) ne tend pas vers 0 et la série $\sum q^n$ diverge donc grossièrement.
- Supposons que $-1 < q < 1$. Soit N un entier naturel. On a alors $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

Puisque $-1 < q < 1$, on a donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} q^{N+1} = 0$ et donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

\square

■ **Exemple 7** : On considère la série $\sum \frac{3}{4^{n+1}}$.

Pour tout entier naturel n , on a $\frac{3}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Or, puisque $-1 < \frac{1}{4} < 1$, la série $\sum \left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge.

Ainsi, la série $\sum \frac{3}{4^{n+1}}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1.$$

Démonstration 7 : Soit q un réel.

- Si $q \leq -1$ ou $q \geq 1$, alors la suite nq^{n-1} ne tend pas vers 0 et la série $\sum nq^{n-1}$ diverge donc grossièrement.
- Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $x \in]-1; 1[$, on note alors $S_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n$. D'une part, pour tout réel $x \in]-1; 1[$,

$$\text{on a } S_N(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

La fonction S_N est alors dérivable sur $] - 1; 1[$ et, pour tout réel $x \in] - 1; 1[$, on a

$$S'_N(x) = \frac{-(N+1)x^N(1-x) - (1-x^{N+1}) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2}$$

Or, on a également que, pour tout réel $x \in] - 1; 1[$,

$$S'_N(x) = \sum_{n=0}^N nx^{n-1}.$$

Ainsi, pour tout réel $x \in] - 1; 1[$,

$$\sum_{n=0}^N nx^{n-1} = \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2}.$$

Soit donc $x \in] - 1; 1[$. Alors, par croissances comparées, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1)x^N = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} Nx^{N+1} = 0$.

Ainsi, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Finalement, la série $\sum nx^{n-1}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. □

Pour la troisième somme, on reprend le même raisonnement en dérivant une seconde fois.

■ **Exemple 8** : On considère la série de terme général $u_n = \frac{n^2 + n + 2}{2^n}$.

Remarquons que, pour tout entier naturel n , on a $n^2 = n(n-1) + n$. Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{n(n-1) + 2n + 2}{2^n} = n(n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, les séries $\sum n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum 2n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergent.

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2 \times \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + 2 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 4 + 4 + 4 = 12 \end{aligned}$$

3.2 Séries de Riemann



Propriété 7 — Séries de Riemann : Soit α un réel. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration 8 : Des cas particuliers seront démontrés en exercice, mais la démonstration complète de ce résultat devra attendre encore quelques chapitres. \square

■ **Exemple 9 :** La somme de ces séries n'est connue que dans certains cas.

On sait par exemple que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

■ **Exemple 10 :** La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (on l'appelle également série harmonique).

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (c'est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}$).

■ **Exemple 11 :** Pour tout entier naturel n , on note $u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on a alors $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.

Or, $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente ($2 > 1$).

D'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est donc convergente.

3.3 Série exponentielle

Propriété 8 : Soit x un réel. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Démonstration 9 : En exercice pour les plus téméraires \square

Remarque : En effectuant un changement d'indice, on a aussi que, pour tout réel x , $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$.

■ **Exemple 12** : On considère la série de terme général $u_n = \frac{n2^n + 3^n}{n!}$.

Pour tout entier naturel n , on a $u_n = \frac{n2^n}{n!} + \frac{3^n}{n!}$. La série de terme général $\frac{3^n}{n!}$ est convergente.

De plus, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\frac{n2^n}{n!} = \frac{2^n}{(n-1)!} = 2 \times \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ qui est le terme général d'une série exponentielle (et est donc convergente).

Ainsi, la série $\sum u_n$ est convergente et, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{0 \times 2^0}{0!} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} = 2e^2 + e^3.$$

4 Convergence absolue

Définition 4 : Soit $\sum u_n$ une série numérique.

On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Propriété 9 : Soit (u_n) une suite réelle. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

La convergence absolue d'une série entraîne sa convergence simple.

Démonstration 10 : Supposons que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente, et donc que la série $\sum |u_n|$ converge.

Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n + |u_n|$.

Puisque pour tout entier naturel n , on a $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$, il en vient que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq v_n \leq 2|u_n|$.

Or, la série de terme général $2|u_n|$ converge et la série $\sum v_n$ est, d'après ce qui précède, une série à termes positifs. D'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge.

Or, pour tout entier naturel n , on a $u_n = v_n - |u_n|$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge. \square

■ **Exemple 13** : Déterminons la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

En effet, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$.

Or, d'après le critère sur les séries de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente. Elle est donc convergente.

On peut par ailleurs montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

■ **Exemple 14 :** Certaines séries sont convergentes sans être absolument convergentes. On parle alors de séries semi-convergentes.

C'est le cas par exemple de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Celle-ci n'est pas absolument convergente puisque pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente (il s'agit de la série harmonique, ou de la série de Riemann d'exposant 1).

Montrons cependant que cette série converge. Pour tout entier naturel non nul N , on note $S_N = \sum_{n \geq 1}^N \frac{(-1)^n}{n}$.

On considère alors les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) . Soit N un entier naturel non nul.

$$S_{2(N+1)} - S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N+2} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+2} - \frac{(-1)^{2N+1}}{2N+1}.$$

Ainsi,

$$S_{2(N+1)} - S_{2N} = \frac{1}{2N+2} - \frac{1}{2N+1} = -\frac{1}{(2N+2)(2N+1)} < 0$$

La suite (S_{2N}) est donc décroissante.

Par ailleurs,

$$S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+3} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2N+3}}{2N+3} - \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+2}.$$

On a donc

$$S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} = -\frac{1}{2N+3} - \frac{1}{2N+2} = -\frac{1}{(2N+2)(2N+3)} > 0$$

La suite (S_{2N+1}) est donc croissante.

Enfin,

$$S_{2N+1} - S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2N+1}}{2N+1} = \frac{1}{2N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont donc adjacentes. On en déduit qu'elles convergent toutes deux vers un même réel.

Puisque les deux suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent vers un même réel, on en déduit, par propriété de recouvrement que la suite (S_N) converge : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est donc convergente.