Séries numériques

▶ Exercice 1

En étudiant les sommes partielles, déterminer la nature des séries suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad \sum \frac{4}{3^n} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

▶ Exercice 2

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n, on a

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}.$$

2. En déduire que la série $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

▶ Exercice 3

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n-1}.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge et calculer sa somme.

▶ Exercice 4

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{n}{n^2-1}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.
2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

▶ Exercice 5

On admet que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n)^2}$ converge et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

▶ Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, justifier que la série donnée converge et calculer sa somme.

$$\sum \frac{n+1}{n!} \qquad \sum \frac{n}{2^n} \qquad \sum \frac{n(n-1)}{5^n} \qquad \sum \frac{2^n}{(n+1)!} \qquad \sum \frac{n^2-2}{n!}$$

Pour cette dernière, on exprimera n^2 en fonction de $n(n-1)$ et n.

$$\sum \frac{4^n+3}{n!} \qquad \sum \frac{n+2}{3^n} \qquad \sum \frac{n(n-1)^n}{3^{n-1}} \qquad \sum \frac{n+1}{n!} \qquad \sum \frac{n}{(n+1)!}$$

► Exercice 7

L'objectif de cet exercice est de démontrer partiellement les résultats sur les séries de Riemann.

1. On suppose que $\alpha \leqslant 0$.
   (a) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$?
   (b) Que peut-on en déduire sur la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$?
2. Cas $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $\ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   (b) En étudiant les sommes partielles, déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$.
3. On suppose que $0 < \alpha < 1$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, on a $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n}$.
   (b) Que peut-on en déduire sur la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$?
4. Cas $\alpha = 2$. Pour tout entier naturel non nul N, on pose $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^2}$.
   (a) Montrer que la suite (S_N) est croissante.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel N, on a $S_N \leqslant 2 - \dfrac{1}{N}$ puis conclure.
5. On suppose que $\alpha > 2$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

► Exercice 8

Soit $q \in]-1;1[$.

1. Justifier que la série $\sum q^{2n}$ converge et donner sa somme.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant m} q^n$ converge et donner sa somme.

► Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n} u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n.
5. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

► Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier la fonction $x \mapsto x - x^2$ sur $]0;1[$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n \in]0;1[$.
3. Étudier les variations de (u_n). en déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et déterminer sa somme.
5. Donner la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

▶ Exercice 11 — EDHEC 2013

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite (u_n).
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
2. (a) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de u_n.
   (b) En déduire un programme, rédigé en Python, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
   (b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1})$.
   (c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

▶ Exercice 12

Soit (u_n) une suite de réels positif et ℓ un réel positif.

1. En revenant à la définition de limite, montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Justifier alors que la série $\sum \dfrac{n}{n^3+1}$ converge.

▶ Exercice 13 — Critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite numérique strictement positive. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. On suppose que $\ell < 1$.
   (a) Justifier qu'il existe un réel ε tel que $\ell + \varepsilon < 1$.
   (b) En revenant à la définition de la limite, montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$,
   $$u_{n+1} \leqslant (\ell+\varepsilon)u_n \quad \text{puis} \quad u_n \leqslant (\ell+\varepsilon)^{n-n_0} u_0$$
   (c) En déduire que $\sum u_n$ converge.
2. On suppose que $\ell > 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
3. On suppose que $\ell = 1$. Montrer que l'on ne peut pas conclure sur la nature de la série.
4. **Application** : Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$ et $\sum \dfrac{n}{\mathrm{e}^n}$.

▸ Exercice 14

Dans tout l'exercice, on prend comme convention : $\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$.

L'objectif de cet exercice est d'établir le résultat suivant : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

Partie A : Une croissance comparée.

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat suivant, qui sera utile dans la partie B.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{|x|^n}{n!}$. On pose $n_0 = \lfloor 2|x| \rfloor$.

On rappelle que pour un réel y, $\lfloor y \rfloor$ désigne l'unique entier vérifiant $\lfloor y \rfloor \leqslant y \leqslant \lfloor y \rfloor + 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on a $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on a $u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$.
3. Conclure.

Partie B : Démonstration.

Pour tout entier naturel non nul n, on considère les fonctions f_n et g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, calcule $f_n(0)$ et $g_n(0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que les fonction f_n et g_n sont dérivables puis montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \quad ; \quad g_n'(x) = \frac{n-2x}{n!}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$
3. **Premier cas** : si $x \geqslant 0$.
   (a) Construire le tableau de variations de f_n et g_n sur $[0; +\infty[$.
   (b) Soit $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2x$. Montrer que $f_n(x) \leqslant 1 \leqslant g_n(x)$.
   (c) En déduire que :
   $$0 \leqslant \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$
   (d) Conclure.
4. Second cas : si $x < 0$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les tableaux de variations des fonctions f_{2n} et f_{2n+1} sur $]-\infty; 0]$.
   (b) Soit $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f_{2n+1}(x) \leqslant 1 \leqslant f_{2n}(x)$.
   (c) En déduire que
   $$0 \leqslant \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leqslant -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leqslant \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \leqslant 0.$$
   (d) En déduire que pour tout réel $x < 0$, les suites $(f_{2n}(x))$ et $(f_{2n+1}(x))$ convergent toutes deux vers e^x.
   (e) Conclure.