Espaces vectoriels

1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1.1 Opérations sur $\mathbb{R}^n$

Définition 1 : Soit n un entier naturel non nul.

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble constitué des n-uplets de réels.

$$\mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

On note par ailleurs $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Nous allons munir l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des opérations suivantes.

Définition 2 — Opérations : Soit $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

On définit la somme de u et v, notée $u + v$ par

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit la multiplication externe de u par λ, notée $\lambda \cdot u$ ou λu par

$$\lambda \cdot u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Il s'agit simplement de la prolongation de l'addition de matrice et de la multiplication d'une matrice par un réel. Nous ne nous intéressons pas en revanche à la possibilité de multiplier les éléments de $\mathbb{R}^n$ entre eux, d'une quelconque manière. Ici, la multiplication se fait avec un réel, qui est un élément "externe" à $\mathbb{R}^n$.

Propriété 1 : Les opérations d'addition et de multiplication par un réel que nous venons de définir sur $\mathbb{R}^n$ possèdent des propriétés fondamentales très naturelles.

- Propriétés de l'addition
  - **Stabilité** de $\mathbb{R}^n$: $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $u + v \in \mathbb{R}^n$;
  - **Associativité** de l'addition : $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $(u + v) + w = u + (v + w)$;
  - **Commutativité** : $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $u + v = v + u$;
  - **Élément neutre** : $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $u + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} + u = u$;
  - Tout élément de $\mathbb{R}^n$ admet un **opposé** : $\forall u \in \mathbb{R}^n\, \exists v \in \mathbb{R}^n \,|\, u + v = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- Propriétés de la multiplication externe
  - **Stabilité** de $\mathbb{R}^n$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n, \lambda \cdot u \in \mathbb{R}^n$;
  - **Associativité** : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \mu) \cdot u$;
  - **Distributivité** par rapport à l'addition réelle : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$;
  - **Distributivité** par rapport à $+$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$;
  - **Élément neutre** : $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $1 \cdot u = u$.

Remarque : En mathématiques, tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un réel qui vérifie exactement ces propriétés est appelé un **espace vectoriel réel**. Les éléments de cet ensemble sont alors appelés des **vecteurs**, quelle que soit leur nature originelle.

Bien que nous nous limitions à $\mathbb{R}^n$ cette année, vous avez déjà rencontré d'autres espaces vectoriels au premier semestre sans le nommer ainsi :

- Pour tout couple d'entier naturels non nuls (n,p), l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de l'addition de matrices et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel réel ;
- L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynômiales, muni de l'addition de polynômes et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel ;
- Pour tout entier naturel n, l'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des fonctions polynômiales de degré **au plus** n, muni de l'addition de polynômes et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.

En deuxième année, vous utiliserez ce cadre commun pour étudier simultanément les matrices, les polynômes et $\mathbb{R}^n$, car tous ces objets se manipulent avec les mêmes règles. Le principal outil est d'ailleurs le suivant.

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 3 : Soit u_1, ..., u_p des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$.

On dit que v est une **combinaison linéaire** des vecteurs u_1, ..., u_p s'il existe des réels λ_1, ..., λ_p tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i.$$

■ **Exemple 1 :** Soit $u_1 = (1,3,2,0)$, $u_2 = (0,-1,0,2)$, $u_3 = (-1,1,1,1)$ et $v = (-1,8,7,5)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Le vecteur v est-il une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 ? Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels. On a alors

$$\begin{aligned}
v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \quad &\Leftrightarrow \quad (-1,8,7,5) = \lambda_1(1,3,2,0) + \lambda_2(0,-1,0,2) + \lambda_3(-1,1,1,1) \\
&\Leftrightarrow \quad (-1,8,7,5) = (\lambda_1 - \lambda_3, 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda 2 + \lambda_3) \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc}
\lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & -1 \\
3\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 8 \\
2\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 7 \\
 & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 5
\end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccccccl}
\lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & -1 & \\
4\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & & = & 7 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
3\lambda_1 & & & & & = & 6 & (L_3 \leftarrow L_1 + L_3) \\
\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 4 & (L_4 \leftarrow L_4 + L_1)
\end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccc}
 & & & \lambda_3 & = -1 \\
 & & \lambda_2 & & = 1 \\
\lambda_1 & & & & = 2 \\
2 & + & 2 \times 1 & & = 4
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $v = 2u_1 + u_2 - u_3$. v est donc bien une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.

■ **Exemple 2 :** Le vecteur $0_{\mathbb{R}^n}$ est évidemment une combinaison linéaire pour n'importe quelle famille de vecteurs.

1.3 Base canonique

Définition 4 : Soit n un entier naturel non nul. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^n$ et on considère

$$e_1 = (1,0,\dots,0) \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0) \quad e_n = (0,0,\dots,0,1)$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. La famille de vecteurs $\mathcal{B}$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.

▪ **Exemple 3 :** La famille $((1,0), (0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
La famille $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

L'utilisation d'une telle famille est motivée par la propriété suivante.

Propriété 2 : Soit $u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors on peut exprimer u comme combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique :

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i.$$

Qui elle-même motive la définition suivante !

Définition 5 : Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Les réels x_1, ..., x_n sont appelées les **coordonnées** du vecteur u dans la base canonique. La matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est alors appelée matrice des coordonnées du vecteur u dans la base canonique $\mathcal{B}$.

De fait, on identifie l'espace $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ce qui est cohérent avec les définitions des opérations que nous avons données sur ces deux espaces.

2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

2.1 Définitions et premiers exemples

Définition 6 : Soit F un ensemble. On dit que F est un sous-espace vectoriel (ou s.e.v.) de $\mathbb{R}^n$ si :

- $F \subset \mathbb{R}^n$;
- F est non vide ;
- F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F.$$

Pour le deuxième point, on utilisera très souvent (voire même systématiquement) la propriété suivante.

Propriété 3 : Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.

Démonstration 1 : Puisque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, F est non vide. Soit donc $u \in F$.
D'après le troisième point de la définition, avec $u = v$ et $\lambda = \mu = 0$, on a alors $0 \times u + 0 \times v \in F$ soit $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.□

■ **Exemple 4 :** Soit n un entier naturel non nul. Les espaces $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Méthode 1 : Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$...

- On se place d'abord dans le bon ensemble !
- On vérifie que F est non vide, notamment en vérifiant que $0_{\mathbb{R}^n}$ est dans cet ensemble ;
- On pose u et v deux éléments quelconques de F ainsi que λ et μ deux réels.
  On vérifie alors que $\lambda u+\mu v$ appartient bien à F.

■ **Exemple 5 :** Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x+3y-z=0\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- D'une part, on a bien $F\subset\mathbb{R}^3$;
- Par ailleurs, $2\times 0+3\times 0-0=0$. Ainsi $0_{\mathbb{R}^3}\in F$ et en particulier, F est non vide.
- Soit $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ deux éléments de F. Soit λ et μ deux réels.
  On a alors $\lambda u+\mu v=(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')$. Or,
  $$\begin{aligned}2(\lambda x+\mu x')+3(\lambda y+\mu y')-(\lambda z+\mu z') &= 2\lambda x+3\lambda y-\lambda z+2\mu x'+3\mu y'-\mu z'\\ &= \lambda\underbrace{(2x+3y-z)}_{=0 \text{ car } u\in F}+\mu\underbrace{(2x'+3y'-z')}_{=0\text{ car } v\in F}\\ &= 0\end{aligned}$$
  Ainsi, $\lambda u+\mu v\in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

■ **Exemple 6 :** Soit $F=\{(2a+3b,a+b,a-b),a,b\in\mathbb{R}\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- D'une part, les éléments de F sont bien des éléments de $\mathbb{R}^3$.
- D'autre part, si l'on prend $a=b=0$, on obtient alors $(2\times 0+3\times 0,0+0,0-0)$ soit $(0,0,0)$. Ainsi, $(0,0,0)\in F$ et en particulier, F est non vide.
- Soit u et v deux vecteurs de F. Soit λ et μ deux réels.
  On pose alors a et b tels que $u=(2a+3b,a+b,a-b)$.
  De même, on pose a' et b' tels que $v=(2a'+3b',a'+b',a'-b')$.
  On a alors
  $$\begin{aligned}\lambda u+\mu v &= \lambda(2a+3b,a+b,a-b)+\mu(2a'+3b',a'+b',a'-b')\\ &= (2\lambda a+2\mu a'+3\lambda b+3\mu b',\lambda a+\mu a'+\lambda b+\mu b',\lambda a+\mu a'-\lambda b-\mu b')\\ &= (2(\lambda a+\mu a')+3(\lambda b+\mu b'),(\lambda a+\mu a')+(\lambda b+\mu b'),(\lambda a+\mu b')-(\lambda b+\mu b'))\end{aligned}$$
  Si l'on pose alors $A=\lambda a+\mu a'$ et $B=\lambda b+\mu b'$, on a alors $\lambda u+\mu v=(2A+3B,A+B,A-B)$.
  Ainsi, $\lambda u+\mu v\in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 2 : Pour montrer qu'un espace F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, il suffit de montrer l'un des points suivants.

- On montre que $0_{\mathbb{R}^n}\notin F$;
- On trouve un élément u de F et un réel λ tel que λu n'appartient pas à F ;

- On trouve deux éléments u et v de F tels que $u+v$ n'est pas dans F.

■ **Exemple 7 :** Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x+3y-z-t=1\}$.

On a $2\times 0+3\times 0-0-0=0\neq 1$.

Ainsi, $0_{\mathbb{R}^4} \notin F$. F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

■ **Exemple 8 :** Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2-y^2=0\}$.

Ici, on a bien $(0,0) \in F$.

Par ailleurs, $(1,1) \in F$ et $(1,-1) \in F$. En revanche, $(1,1)+(1,-1)=(2,0)$, mais $(2,0) \notin F$.

Ainsi, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2.2 Exemple fondamental : ensemble des solutions d'un système linéaire homogène

Dans la première partie, nous avons identifié les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent, tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sera naturellement considéré comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et réciproquement. Cette identification est particulièrement utile pour faire le lien avec les systèmes linéaires.

Propriété 4 : Soit (S) un système linéaire homogène à p équations et n inconnues.

L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration 2 : Notons F l'ensemble des solutions du système (S).

- D'une part, puisqu'il y a n inconnues dans le système (S), l'ensemble F est bien inclus dans $\mathbb{R}^n$.
- Par ailleurs, puisque le système est homogène (son second membre est donc 0), alors $0_{\mathbb{R}^n} \in F$ et en particulier, F est non vide.
- Soit maintenant u et v deux éléments de F. Notons $A \in \mathcal{M}_{p,n}$ la matrice associée au système (S), U et V les matrices respectives des coordonnées des vecteurs u et v dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Remarquons par ailleurs, que la matrice des coordonnées de $0_{\mathbb{R}^n}$ dans cette base est la matrice $0_{n,1}$. On a alors $AU=0_{n,1}$ et $AV=0_{n,1}$.
  Soit λ et μ deux réels. La matrice des coordonnées de $\lambda u+\mu v$ dans la base canonique est alors $\lambda U+\mu V$. Or,
  $$A(\lambda U+\mu V)=\lambda AU+\mu AV=\lambda 0_{n,1}+\mu 0_{n,1}=0_{n,1}$$
  Ainsi, $\lambda u+\mu v \in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. □

2.3 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 7 : Soit u_1, u_2, ..., u_p des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble des combinaisons linéaires de u_1, u_2, ... u_p est noté $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_p)$.

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_p)=\left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i,\ \lambda_1\in\mathbb{R},\lambda_2\in\mathbb{R},\ \dots,\ \lambda_p\in\mathbb{R}\right\}$$

■ **Exemple 9 :** On a $(2,1) = 2\times(3,1) - 1\times(4,1)$. Ainsi, $(2,1) \in \text{Vect}((3,1),(4,1))$.

■ **Exemple 10 :** On a vu que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ pouvait s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, et réciproquement. Ainsi, $\mathbb{R}_n = \text{Vect}(\mathcal{B})$.

Propriété 5 : Soit u_1, u_2, ..., u_p des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Alors $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(u_1$, ..., $u_p)$.

Démonstration 3 :

- Puisque les vecteurs u_1, ..., u_p sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient à $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset \mathbb{R}^n$.
- Par ailleurs, $0_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{p} 0\times u_i$. On a donc $0_{\mathbb{R}^n} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
- Soit u et v deux vecteurs de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. u et v sont donc des combinaisons linaires des vecteurs u_1, ..., u_p. On pose alors α_1, ..., α_p et β_1, ..., β_p tels que $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$ et $v = \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i$.

  Soit λ et μ deux réels. On a alors

  $$\lambda u + \mu v = \lambda \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \mu \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda\alpha_i + \mu\beta_i) u_i.$$

  Pour tout entier $i \in [\![1,p]\!]$, on pose alors $\gamma_i = \lambda\alpha_i + \mu\beta_i$. On a alors $\lambda u + \mu v = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i u_i$.

  $\lambda u + \mu v$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs u_1, ..., u_p.

Finalement, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. □

♥ **Méthode 3 :** Pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on peut essayer de l'exprimer comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'un certain nombre de vecteurs.

■ **Exemple 11 :** Soit $F = \{(2a+b+c, 3a+2c, a+2b+c), a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a en effet $F = \{(2a,3a,a) + (b,0,2b) + (c,c,c), a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi, $F = \{a(2,3,1) + b(1,0,2) + c(1,1,1), a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

Autrement dit, $F = \text{Vect}((2,3,1), (1,0,2), (1,1,1))$. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 6 : Soit u_1, u_2, ..., u_p des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Si u_1 est une combinaison linéaire des vecteurs u_2, ..., u_p, alors $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_2, \dots, u_p)$.

Démonstration 4 : $\boxed{\supset}$: Soit $u \in \text{Vect}(u_2, \dots, u_p)$. On pose alors λ_2, ..., λ_p tel que $u = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$.

En prenant alors $\lambda_1 = 0$, on a $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Ainsi, $u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

On a donc $\text{Vect}(u_2, \dots, u_p) \subset \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$. (Remarquons que cette inclusion est toujours vraie).

$\boxed{\subset}$: Réciproquement, soit $u \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$. Soit donc λ_1, λ_2, ..., λ_p tels que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.

Or, u_1 est une combinaison linéaire de u_2, ..., u_p. Soit donc α_2, ..., α_p tels que $u_1 = \sum_{i=2}^{p} \alpha_i u_i$.

On a alors

$$u = \lambda_1 u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i = \lambda_1 \sum_{i=2}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i = \sum_{i=2}^{p} (\lambda_1 \alpha_i + \lambda_i) u_i.$$

Ainsi, $u \in \text{Vect}(u_2, \ldots, u_p)$.

On a donc $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \subset \text{Vect}(u_2, \ldots, u_p)$. □

■ **Exemple 12 :** Reprenons dans l'exemple précédent $F = \{(2a+b+c, 3a+2c, a+2b+c), a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

On a vu que $F = \text{Vect}((2,3,1), (1,0,2), (1,1,1)\}$.

Or, $(2,3,1) + (1,0,2) = 3(1,1,1)$ soit $(2,3,1) = -1 \cdot (1,0,2) + 3 \cdot (1,1,1)$. Ainsi, le vecteur $(2,3,1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1,0,2)$ et $(1,1,1)$.

Finalement, on a en fait $F = \text{Vect}((1,0,2), (1,1,1)\}$.

Tout l'enjeu lorsque nous aurons un sous-espace vectoriel sera donc de trouver une famille qui engendre ce sous-espace, tout en ayant la famille la plus "simple" possible.

3 Familles de vecteurs

3.1 Familles génératrices

Définition 8 : Soit F un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit u_1, ..., u_p des vecteurs de F.

On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de F lorsque $F = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

Autrement dit, tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs u_1, ..., u_p.

L'égalité des ensembles F et $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ suggère que, réciproquement, toute combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_p appartienne à F, mais ceci est immédiat puisque F est un sous-espace vectoriel. En pratique, on n'a donc une seule inclusion à vérifier.

♥ **Méthode 4 :** Pour montrer qu'une famille donnée $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice d'un (s.e.v) F.

- On vérifie que les vecteurs u_1, ..., u_p appartiennent bien à l'ensemble F ;
- On introduit $u \in F$;
- On montre que l'équation $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ d'inconnues λ_1, ..., λ_p admet toujours au moins une solution .

■ **Exemple 13 :** Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + 2z = 0\}$, $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (-2,0,1)$. Montrons que (u_1, u_2) est une famille génératrice de F.

Tout d'abord, on a $1 - 1 + 2 \times 0 = 0$. Ainsi, $u_1 \in F$.

De même, $-2 - 0 + 2 \times 1 = 0$. Ainsi, $u_2 \in F$.

Soit $u=(x,y,z)\in F$. Soit λ_1 et λ_2 deux réels. On a

$$u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2 \Leftrightarrow (x,y,z)=(\lambda_1-2\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \lambda_1-2\lambda_2 \\ \lambda_1 & = & y \\ \lambda_2 & = & z \end{array}\right.$$

Or, puisque $u\in F$, on a alors $x-y+2z=0$ et donc $x=y-2z$.

Ainsi, on a $u=yu_1+zu_2$. u est donc une combinaison linéaire de u_1 et u_2. La famille (u_1,u_2) est génératrice de F.

En pratique, la famille génératrice n'est pas toujours donnée et il est demandée de la construire.

Méthode 5 : Pour trouver une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel donnée, on exprime tout élément de cet ensemble comme combinaison linéaire d'un certain nombre de vecteurs de cet ensemble.

Exemple 14 : On considère l'ensemble $F=\{(a+b,a-b,a+b),\, a,b\in\mathbb{R}\}$.

On a alors $F=\{a(1,1,1)+b(1,-1,1),\, a,b\in\mathbb{R}\}$. Ainsi, $F=\text{Vect}((1,1,1),\,(1,-1,1))$.

La famille $((1,1,1),\,(1,-1,1))$ est donc génératrice de F.

Exemple 15 : On considère l'ensemble $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x+y-z=0\}$.

F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une famille génératrice de cet ensemble.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$(x,y,z)\in F \Leftrightarrow 2x+y-z=0 \Leftrightarrow z=2x+y$$

Ainsi, $F=\{(x,y,2x+y),\, x,y\in\mathbb{R}\}$ et donc $F=\{x(1,0,2)+y(0,1,1),\, x,y\in\mathbb{R}\}$.

Finalement, on a $F=\text{Vect}((1,0,2),\,(0,1,1))$. La famille $((1,0,2),\,(0,1,1))$ est donc génératrice de F.

Remarque : On vérifiera rapidement que les vecteurs trouvées sont bien des éléments de l'ensemble considéré. En l'occurrence, on a bien $2\times1+0-2=0$ et $2\times0+1-1=0$.

Exemple 16 : Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y+z=0 \text{ et } 2x+y-z=0\}$.

F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une famille génératrice de cet ensemble.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in F \quad & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_2\leftarrow L_2-L_1) \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2(2z)+y-z & = & 0 \\ x & = & 2z \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -3z \\ x & = & 2z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $F = \{(2z, -3z, z), z \in \mathbb{R}\}$ soit $F = \{z(2, -3, 1), z \in \mathbb{R}\}$ et finalement $F = Vect((2, -3, 1))$.

La famille $((2, -3, 1))$ est génératrice de F.

3.2 Familles libres, familles liées

Définition 9 : Soit u_1, ..., u_p des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est **libre** si

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0\right)$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire permettent d'obtenir le vecteur $0_{\mathbb{R}^n}$ est la combinaison nulle.

Dans le cas contraire, on dira que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est **liée**.

Méthode 6 : Pour déterminer si une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

- On pose λ_1, ..., λ_p des réels ;
- On suppose que $\sum_{i=1} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{R}^n}$;
- On résout le système linéaire associé
  - Si ce système admet $(0, \ldots, 0)$ comme unique solution, alors la famille est libre ;
  - Sinon, cette famille est liée.

Exemple 17 : Soit $u_1 = (1,3,2)$, $u_2 = (1,1,1)$ et $u_3 = (2,-1,1)$. On souhaite déterminer si la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels. On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \lambda_1(1,3,2) + \lambda_2(1,1,1) + \lambda_3(2,-1,1) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0) \quad &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\
3\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\
2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0
\end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 & \\
7\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & & & = & 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1) \\
3\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1)
\end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 & \\
7\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & & & = & 0 & \\
2\lambda_1 & & & & & = & 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1)
\end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Exemple 18 : Soit $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (0,1,2)$, $v_3 = (1,3,3)$. On souhaite déterminer si la famille

(v_1, v_2, v_3) est libre. Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels. On a

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=\lambda_1(1,1,-1)+\lambda_2(0,1,2)+\lambda_3(1,3,3)=(\lambda+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3,-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=(0,0,0) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\\
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0\\
-\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0
\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 & \\
 & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 & (L_2\leftarrow L_2-L_1)\\
 & & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & 0 & (L_3\leftarrow L_3+L_1)
\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}
\lambda_1 & = & -\lambda_3\\
\lambda_2 & = & -2\lambda_3
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Prenons alors $\lambda_3=1$. On a alors $\lambda_2=-2$ et $\lambda_1=-1$.

Ainsi, $-v_1-2v_2+v_3=(0,0,0)$. On a trouvé une combinaison linéaire non triviale de u_1, u_2 et u_3 qui donne $(0,0,0)$. La famille (v_1, v_2, v_3) est donc liée.

Remarque : si l'on remarque tout de suite cette combinaison linéaire, on peut évidemment conclure immédiatement. C'est notamment le cas lorsque l'on considère uniquement deux vecteurs : la famille formée de ces deux vecteurs est liée si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.

■ **Exemple 19 :** Soit $u_1=(1,2,3)$ et $u_2=(-2,-4,-6)$.

On a alors $u_2=-2u_1$, soit $u_2+2u_1=(0,0,0)$. Ainsi, la famille (u_1,u_2) est liée.

■ **Exemple 20 :** Soit $u_1=(1,0,4)$ et $u_2=(2,1,0)$.

Le vecteur u_1 présente un 0 en deuxième position et pas le vecteur u_2. Il est impossible que ces deux vecteurs soient liées. La famille (u_1, u_2) est donc libre.

Propriété 7 : Soit $\mathcal{F}=(u_1,\dots,u_p)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- On a forcément $0_{\mathbb{R}^n}\notin\mathcal{F}$;
- Toute famille de vecteurs incluse dans $\mathcal{F}$ est également libre.

■ **Exemple 21 :** Soit $u_1=(1,3,2)$, $u_2=(1,1,1)$ et $u_3=(2,-1,1)$.

On a démontré que la famille (u_1, u_2, u_3) était libre.

Ainsi, les familles (u_1, u_2), (u_2, u_3) et (u_1, u_3) sont également libres.

3.3 Bases d'un sous-espace-vectoriel

Définition 10 : Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit u_1, ..., u_p des vecteurs de F.

On dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de F si

$$\forall u \in F, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \,|\, u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i.$$

Autrement dit, tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, ..., u_p.

Les réels λ_1, ..., λ_p sont alors appelés coordonnées de u dans la base $(u_1, \dots, u_p)$.

Méthode 7 : Pour montrer qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ donnée est une base de F.

- On vérifie que les vecteurs appartiennent bien à F.
- On introduit $u \in F$;
- On montre que l'équation $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ d'inconnues λ_1, ..., λ_p admet toujours une unique solution .

▪ **Exemple 22 :** Soit $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (1,3)$. Montrons que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

D'abord, on a bien $u_1 \in \mathbb{R}^2$ et $u_2 \in \mathbb{R}^2$.

Soit $u = (x,y) \in F$. Soit λ_1, λ_2 des réels. On a alors

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1(1,2) + \lambda_2(1,3) = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2).$$

Ainsi,

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 \\ y & = & 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & \\ y-2x & = & & & \lambda_2 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array} \right.$$

On aboutit à un système triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Ainsi, le système $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ admet un unique couple solution (λ_1, λ_2) et ce, peu importe le vecteur $u \in F$ choisi.

La famille (u_1, u_2) est donc une base de F.

Propriété 8 : Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

Alors $\mathcal{B}$ est une base de F si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de F.

Démonstration 5 : Supposons que $\mathcal{B}$ soit une base de F.

D'après la définition de base, tout vecteur de F peut donc s'écrire (qui plus est, de manière unique) comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base. La famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice de F.

Par ailleurs, soit λ_1, ..., λ_p des réels. Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{R}^n}$.

On sait par ailleurs que $\sum_{i=1}^{p} 0 \cdot u_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. Puisque la famille $\mathcal{B}$ est une base, la décomposition du vecteur $0_{\mathbb{R}^n}$ comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, ..., u_p est unique. Il en vient que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $\lambda_i = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

Réciproquement, supposons que la famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de F. Soit $u \in F$.

Puisque la famille $\mathcal{B}$ est génératrice, prenons des réels λ_1, ..., λ_p et α_1, ..., α_p tels que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$.

On a alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = 0_{\mathbb{R}^n}$ soit $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \alpha_i) u_i = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Puisque $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre, il en vient que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\lambda_i - \alpha_i = 0$ et donc $\lambda_i = \alpha_i$. La décomposition de u selon les vecteurs u_1, ..., u_p est donc unique : la famille $\mathcal{B}$ est donc une base de F. □

Définition 11 : Soit n un entier naturel non nul. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^n$ et on considère les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

La base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est, comme son nom l'indique, une base de $\mathbb{R}^n$.

■ **Exemple 23 :** Soit $F = \{(2a+b, a+c, b-a, a+b+c), a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

On a $F = \{a(2, 1, -1, 1) + b(1, 0, 1, 1) + c(0, 1, 0, 1), a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi, $F = \text{Vect}((2, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1))$.

En particulier, F est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont la famille $((2, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1))$ est génératrice. Notons les vecteurs de cette famille u_1, u_2 et u_3.

Pour montrer que cette famille est une base de F il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

Soit donc a, b, c trois réels. On a alors $au_1 + bu_2 + cu_3 = (2a+b, a+c, b-a, a+b+c)$. Ainsi,

$$au_1+bu_2+cu_3 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & & & = & 0 \\ a & & & + & c & = & 0 \\ -a & + & b & & & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & & & = & 0 \\ a & & & + & c & = & 0 \\ 3a & & & & & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \end{array}\right. \quad (L_3 \leftarrow L_1 - L_3)$$

On a alors

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ a & = & 0 \\ b+c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.

Finalement, cette famille est une base de F.

4 Dimension d'un sous-espace vectoriel

4.1 Notion de dimension

Théorème 6 : Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Alors F admet des bases qui ont toutes le même cardinal : ce cardinal est appelé dimension du sous-espace vectoriel F et est noté $\dim(F)$.

Remarque : on aura $\dim(\{0_{\mathbb{R}^n}\}) = 0$.

■ **Exemple 24 :** La base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est donc de dimension n.

Méthode 8 : Pour déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel, il suffit donc de trouver une base de cet espace. La dimension est alors le nombre de vecteurs de la base.

■ **Exemple 25 :** On considère $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (1,1,1)$, $u_3 = (2,0,1)$ et on note $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Par définition, la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de F. **On ne peut toutefois pas conclure sur la dimension de F puisque l'on ne sait pas si cette famille est libre.**

On remarque d'ailleurs que $u_3 = u_2 + u_1$. Ainsi, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, et la famille (u_1, u_2) est donc génératrice de F.

Par ailleurs, les vecteurs u_1 et u_2 sont deux vecteurs non colinéaires et forment donc une famille libre. Ainsi, (u_1, u_2) est une base de F. On a donc $\dim(F) = 2$.

4.2 Conséquences sur les familles libres et génératrices

Propriété 9 : Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de F.

- Si $\mathcal{F}$ est une famille libre, alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \leqslant p$;
- Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F, alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \geqslant p$.

En conséquence de cette proposition, toute famille admettant $n-1$ vecteurs ou moins ne peut pas être génératrice d'un sous-espace vectoriel de dimension n. De même, toute famille de $n+1$ vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension n est forcément liée.

■ **Exemple 26 :** On considère $u_1 = (12,4,3)$, $u_2 = (3,1,-5)$, $u_3 = (4,8,-7)$ et $u_4 = (\pi, \sqrt{2}, 5)$.

Les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 sont 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Or, $4 > \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Ainsi, d'après la forme contraposée de la première proposition ci-dessus, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée.

Propriété 10 : Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension p. Soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs telle que $\text{Card}(\mathcal{B}) = p$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- $\mathcal{B}$ est une base de F ;
- $\mathcal{B}$ est libre ;
- $\mathcal{B}$ est génératrice de F.

♥ **Méthode 9 :** Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace dont on connaît la dimension, il suffit de montrer

- que cette famille contient le même nombre de vecteurs que la dimension du sous-espace considéré ;
- que cette famille est libre OU que cette famille est génératrice.

La liberté est en général plus aisé à obtenir, il est donc pertinent de commencer par là...

■ **Exemple 27 :** Soit $u_1 = (2,1,1)$, $u_2 = (1,2,1)$ et $u_3 = (1,1,2)$. Montrons que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que cette famille est libre. Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels. On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0) \quad & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\ & & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) \\ & & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1) \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\ & & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\ & & & & 8\lambda_3 & = & 0 & (L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2) \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}
$$

Ainsi, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

De plus, cette famille comporte 3 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Ainsi, (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 12 : Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ le nombre

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})).$$