Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

► Exercice 1 – Voir le corrigé

Soit $u = (1, -1, 2)$ et $v = (1, 1, -1)$. Soit $w_1 = (3, 1, 0)$, $w_2 = (2, 1, 1)$ et $w_3 = (1, -5, 8)$.

Les vecteurs w_1, w_2 et w_3 sont-ils des combinaisons linéaires de u et v ?

► Exercice 2 – Voir le corrigé

Soit $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (2, 1, 0, 1)$ et $u_3 = (0, -1, 1, 2)$.

1. Les vecteurs $v_1 = (1, -1, 3, -4)$ et $v_2 = (1, -1, 3, 0)$ sont-ils des combinaisons linéaires de u_1 et u_2 ?
2. Les vecteurs $w_1 = (5, 3, 0, -1)$ et $w_2 = (5, 3, 0, 2)$ sont-ils des combinaisons linéaires de u_1, u_2 et u_3 ?

► Exercice 3 – Voir le corrigé

Les espaces suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Justifier.

$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\}$

$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 1\}$

$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xyz = 0\}$

$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geqslant 0\}$

$F_3 = \{(a - b, b + a, a - 2b),\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$

$F_6 = \{(a^2, a, b),\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + 2z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en procédant de trois manières :

- ... en revenant à la définition ;
- ... en utilisant directement une propriété du cours ;
- ... en l'exprimant comme le sous-espace vectoriel engendré par une certaine famille de vecteurs.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, déterminer si elle est libre ou liée.

1. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 2)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$ et $u_4 = (2, 2, 0)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_2 = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, -2, 4)$ et $v_2 = (-2, 4, -8)$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_3 = (w_1, w_2, w_3)$ avec $w_1 = (1, -1, 0)$, $w_2 = (0, 1, -1)$ et $w_3 = (1, 0, 1)$.
4. Dans $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{F}_4 = (z_1, z_2, z_3)$ avec $z_1 = (1, 0, 1, 2)$, $z_2 = (0, 1, -1, 1)$ et $z_3 = (2, -3, 5, 1)$.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour quelles valeurs du réel a les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ et $u_3 = (0, a, -1)$.
2. $\mathcal{F}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$ et $v_3 = (1, 4, a)$.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$ et $v_3 = (1, 4, 9)$.
Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels suivants.

1. $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\right\}$
2. $F_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \text{ et } x - 2y + t = 0\right\}$
3. $F_3 = \{(a+2c,\, a+b+3c,\, a-b+c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$
4. $F_4 = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ avec $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (0,-1,1)$ et $u_4 = (2,1,1)$.

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\right\}$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1,u_2)$ avec $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (-2,0,1)$ est une base de F.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

On considère les vecteurs $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $v = (x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}'$.
3. En déduire les coordonnées du vecteur $w = (2,-3,5)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,2,-1,1)$ et $v_2 = (0,1,1,-1)$.

1. Montrer que la famille (v_1,v_2) est libre.
2. Compléter cette famille à l'aide de vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\right\}$.
Pour tout réel a, on pose le vecteur $v_a = (a,1,a^2)$.

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le vecteur v_a appartient à P.
2. Pour chacune des valeurs trouvées à la question précédente, compléter le vecteur v_a par un vecteur $w \in P$ bien choisi pour que la famille (v_a,w) forme une base de P.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_1 = (u_1,u_2,u_3)$ avec $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,3,1)$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{F}_2 = (v_1,v_2,v_3,v_4)$ avec $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,0,-1,2)$, $v_3 = (3,2,1,4)$ et $v_4 = (0,1,2,-1)$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_3 = (w_1,w_2,w_3,w_4)$ avec $w_1 = (1,0,0)$, $w_2 = (1,1,0)$, $w_3 = (1,1,1)$ et $w_4 = (5,-2,7)$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Discuter, en fonction de la valeur du paramètre réel a, du rang des familles de vecteurs suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_a = (u_1,u_2,u_3)$ avec $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (2,0,1)$ et $u_3 = (0,a,-3)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{G}_a = (v_1,v_2,v_3,v_4)$ avec $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$ et $v_4 = (2,-1,a)$.

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère une famille libre de quatre vecteurs (u_1,u_2,u_3,u_4).

1. On pose $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = u_2 + u_3$ et $v_3 = u_3 + u_1$.
   Montrer que la famille (v_1,v_2,v_3) est libre.
2. On pose $w_1 = u_1 + u_2$, $w_2 = u_2 + u_3$, $w_3 = u_3 + u_4$ et $w_4 = u_4 + u_1$.
   La famille (w_1,w_2,w_3,w_4) est-elle libre ou liée ?

3. Que peut-on conjecturer sur la liberté d'une famille construite sur ce modèle avec p vecteurs, selon que p est pair ou impair ?

▶ Exercice 17 – Voir le corrigé

Soient a, b et c trois nombres réels. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs :

$$u = (1, a, a^2), \quad v = (1, b, b^2) \quad \text{et} \quad w = (1, c, c^2).$$

1. On suppose dans cette question que $a = b$. La famille (u, v, w) peut-elle être une base de $\mathbb{R}^3$?
2. On suppose désormais que les trois réels a, b et c sont deux à deux distincts ($a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$). Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   (a) Écrire le système linéaire associé.
   (b) En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, montrer que l'on peut factoriser la deuxième équation par $(b - a)$ et la troisième par $(c - a)$.
   (c) Achever la résolution du système et conclure sur la nature de la famille (u, v, w).

▶ Exercice 18 – Voir le corrigé

Soit $n \geqslant 2$. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On considère l'ensemble $H_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$.

1. Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. On définit pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ le vecteur $u_k = e_k - e_{k+1}$.
   Vérifier que pour tout k, $u_k \in H_n$.
3. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ est libre.
4. Démontrer que tout vecteur de H_n s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(u_1, \ldots, u_{n-1})$.
   Que vaut $\dim(H_n)$?

▶ Exercice 19 – Voir le corrigé

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on définit :

$$u = (a, b, c), \quad v = (b, c, a) \quad \text{et} \quad w = (c, a, b).$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$. On note (S) le système associé.

1. Montrer que $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(a + b + c) = 0$.
2. **Cas 1 :** On suppose que $a + b + c = 0$.
   Proposer un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ non nul solution de (S). La famille est-elle libre ?
3. **Cas 2 :** On suppose que $a + b + c \neq 0$.
   Démontrer que si la famille est liée, alors on a nécessairement $a = b = c$.
4. Conclure : à quelle condition la famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Corrigés succincts

▶ Correction 1 – Voir l'énoncé

On cherche s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu v = w_i$. Pour w_1, le système donne $\lambda + \mu = 3$, $-\lambda + \mu = 1$, et $2\lambda - \mu = 0$. On trouve $\lambda = 1$ et $\mu = 2$. Le système est compatible, donc $w_1 = u + 2v$. Pour w_2, le système est incompatible (les deux premières lignes donnent $\lambda = 1/2, \mu = 3/2$ ce qui ne vérifie pas la 3ème). Donc $w_2 \notin \text{Vect}(u, v)$. Pour w_3, la résolution donne $\lambda = 3$ et $\mu = -2$. Le système est compatible : $w_3 = 3u - 2v$.

▶ Correction 2 – Voir l'énoncé

1. Pour v_1, on résout $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = v_1$. On obtient $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$. C'est compatible, $v_1 = 3u_1 - u_2$. Pour v_2, les mêmes lignes imposent $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$, mais cela contredit la 4ème ligne. Système incompatible, $v_2 \notin \text{Vect}(u_1, u_2)$.
2. Pour w_1, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = w_1$ donne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$. Compatible : $w_1 = u_1 + 2u_2 - u_3$. Pour w_2, les mêmes valeurs contredisent la dernière équation. Système incompatible, $w_2 \notin \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

▶ Correction 3 – Voir l'énoncé

- F_1 : Oui. L'équation est linéaire et homogène. On peut écrire $F_1 = \text{Vect}((2,1,0), (-3,0,1))$.
- F_2 : Non. Le vecteur nul $(0,0,0)$ ne vérifie pas $0 - 0 + 0 = 1$.
- F_4 : Non. Les vecteurs $u = (1,1,0)$ et $v = (0,0,1)$ sont dans F_4, mais leur somme $(1,1,1)$ n'y est pas (car $1 \times 1 \times 1 \neq 0$).
- F_5 : Non. Le vecteur $(1,0,0)$ y est, mais en le multipliant par $\lambda = -1$, on obtient $(-1,0,0)$ qui n'y est plus. (Non stable par produit).
- F_3 : Oui. On sépare a et b : $u = a(1,1,1) + b(-1,1,-2)$. Donc $F_3 = \text{Vect}((1,1,1), (-1,1,-2))$.
- F_6 : Non. Le vecteur $u = (1,1,0)$ (avec $a = 1, b = 0$) est dans F_6. Si on le multiplie par $\lambda = 2$, on obtient $(2,2,0)$. Or $2 \neq 2^2$, donc il n'est plus dans F_6.

▶ Correction 4 – Voir l'énoncé

- **Définition :** Le vecteur nul appartient à F $(0 - 0 + 0 = 0)$. Soient $u(x,y,z), u'(x',y',z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $\lambda u + u'$, on a : $(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') = \lambda(x - y + 2z) + (x' - y' + 2z') = \lambda(0) + 0 = 0$. F est stable par C.L.
- **Propriété du cours :** F est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène (sans terme constant) à 3 inconnues. C'est donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
- **Avec Vect :** On a $x = y - 2z$. Donc tout vecteur de F s'écrit $(y - 2z, y, z) = y(1,1,0) + z(-2,0,1)$. Ainsi $F = \text{Vect}((1,1,0), (-2,0,1))$, ce qui prouve que c'est un s.e.v.

▶ Correction 5 – Voir l'énoncé

1. Le vecteur nul est dans F et dans G, donc dans $F \cap G$. Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $u, v \in F$ (s.e.v.), $\lambda u + v \in F$. De même pour G. Donc $\lambda u + v \in F \cap G$.
2. Si $F \subset G$, $F \cup G = G$ (qui est un s.e.v.). Réciproquement, par l'absurde : supposons $F \cup G$ est un s.e.v, mais qu'il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Puisque $F \cup G$ est un s.e.v., $z = x + y \in F \cup G$. Si $z \in F$, alors $y = z - x \in F$ (absurde). Si $z \in G$, alors $x = z - y \in G$ (absurde).

▶ Correction 6 – Voir l'énoncé

1. Liée. Il y a 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (dimension 3).
2. Liée. Les vecteurs sont colinéaires : $v_2 = -2v_1$.

3. Libre. La résolution de $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
4. Liée. Le système donne une infinité de solutions. On trouve par exemple la relation : $z_3 = 2z_1 - 3z_2$.

▶ Correction 7 – Voir l'énoncé

1. La résolution du système donne $(3-a)\lambda_1 = 0$. La famille est libre si et seulement si $a \neq 3$.
2. Le pivot de Gauss donne un système triangulaire avec $(a-7)\lambda_3 = 0$ sur la dernière ligne. Libre si et seulement si $a \neq 7$.

▶ Correction 8 – Voir l'énoncé

La famille contient 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Il suffit de montrer qu'elle est libre. Le système homogène associé, échelonné par Gauss, n'admet que la solution nulle. Libre + bon cardinal = base.

▶ Correction 9 – Voir l'énoncé

1. $y = 2x + z \implies u = x(1,2,0) + z(0,1,1)$. Base : $((1,2,0),(0,1,1))$, $\dim = 2$.
2. $z = x + y$ et $t = -x + 2y \implies u = x(1,0,1,-1) + y(0,1,1,2)$. Base : $((1,0,1,-1),(0,1,1,2))$, $\dim = 2$.
3. $F_3 = \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,-1),(2,3,1))$. On note que $v_3 = 2v_1 + v_2$. On peut l'enlever. Base : $((1,1,1),(0,1,-1))$, $\dim = 2$.
4. On remarque que $u_3 = u_1 - u_2$ et $u_4 = u_1 + u_2$. Base : (u_1, u_2), $\dim = 2$.

▶ Correction 10 – Voir l'énoncé

1. Vérifions l'appartenance : u_1 et u_2 vérifient bien l'équation de F. 2. En isolant y, on trouve $F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,2,1))$, donc $\dim(F) = 2$. 3. La famille (u_1, u_2) est libre, appartient à F, et son cardinal correspond à la dimension de F. C'est une base.

▶ Correction 11 – Voir l'énoncé

1. 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. On résout $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. Le système donne $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, donc tout est nul. Famille libre, c'est une base.
2. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = v(x,y,z)$. La résolution donne $\lambda_1 = z$, $\lambda_2 = y - z$ et $\lambda_3 = x - y$.
3. Pour $w(2,-3,5)$, on applique la formule : $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3-5 = -8$, $\lambda_3 = 2-(-3) = 5$. Les coordonnées sont $(5,-8,5)$.

▶ Correction 12 – Voir l'énoncé

1. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (il y a un 0 dans v_2 qui ne correspond pas). Libre.
2. On peut ajouter $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$. La famille (v_1, v_2, e_3, e_4) est génératrice de $\mathbb{R}^4$ et possède 4 vecteurs. C'est une base.

▶ Correction 13 – Voir l'énoncé

1. On injecte les coordonnées : $a - 3(1) + 2a^2 = 0$. Les solutions de cette équation du second degré sont $a = 1$ et $a = -3/2$.
2. L'espace P est un plan (dimension 2). Une base nécessite 2 vecteurs libres. Un vecteur simple de P est $w = (3,1,0)$. Pour $a = 1$, $v_1 = (1,1,1)$. (v_1, w) est libre, donc c'est une base. Pour $a = -3/2$, $v_{-3/2} = (-3/2, 1, 9/4)$. $(v_{-3/2}, w)$ est libre, c'est aussi une base.

▶ Correction 14 – Voir l'énoncé

1. On voit que $u_3 = u_1 + u_2$. On l'élimine. Les deux restants sont libres. Rang = 2.
2. Le système homogène montre que les 2 dernières équations sont redondantes. On trouve que v_3 et v_4 sont des combinaisons de v_1, v_2. Rang = 2.

3. Les 3 premiers vecteurs forment une base canonique "triangulaire" de $\mathbb{R}^3$. La famille engendre $\mathbb{R}^3$. Rang = 3.

▶ Correction 15 – Voir l'énoncé

1. u_1 et u_2 sont libres, donc le rang est au moins 2. On cherche si $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$. Le système $xu_1 + yu_2 = u_3$ admet une solution si $a = 2$. Si $a = 2$, rang=2. Sinon, rang=3.
2. On remarque que $v_1 + v_2 = v_3$. On retire v_3. v_1 et v_2 sont libres. On cherche si $v_4 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$. Le système est compatible uniquement pour $a = 1$. Si $a = 1$, rang=2. Sinon, rang=3.

▶ Correction 16 – Voir l'énoncé

1. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \implies (\lambda_1 + \lambda_3)u_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)u_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)u_3 = 0$. Puisque les u_i sont libres, chaque coefficient est nul. On obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Libre.
2. On remarque que $w_1 - w_2 + w_3 - w_4 = u_1 + u_2 - u_2 - u_3 + u_3 + u_4 - u_4 - u_1 = 0$. La famille est liée.
3. On conjecture que si p est pair, la famille est liée (par somme alternée), et si p est impair, elle est libre.

▶ Correction 17 – Voir l'énoncé

1. Si $a = b$, $u = v$. La famille contient des redondances, elle est liée. Ce n'est pas une base.
2. (a) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3 = 0$ et $a^2\lambda_1 + b^2\lambda_2 + c^2\lambda_3 = 0$.
   (b) On substitue $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3$. L2 devient $\lambda_2(b-a) + \lambda_3(c-a) = 0$. L3 devient $\lambda_2(b^2 - a^2) + \lambda_3(c^2 - a^2) = 0$. On utilise l'identité remarquable.
   (c) Puisque $(b-a) \neq 0$, la résolution finale donne $\lambda_3(c-a)(c-b) = 0 \implies \lambda_3 = 0$. D'où $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$. Libre. C'est une base.

▶ Correction 18 – Voir l'énoncé

1. L'ensemble est décrit par une équation linéaire homogène (la somme fait 0). C'est un s.e.v.
2. Pour u_k, il y a un 1 et un -1, les autres sont nuls. La somme fait 0. Donc $u_k \in H_n$.
3. $\sum \lambda_k u_k = 0 \implies \lambda_1 = 0$ (1ère coord), puis par effet domino $-\lambda_{k-1} + \lambda_k = 0$, donc tous les $\lambda_k = 0$.
4. On peut exprimer $x \in H_n$ comme $x = \sum \alpha_k u_k$ avec $\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$. C'est une base, $\dim(H_n) = n - 1$.

▶ Correction 19 – Voir l'énoncé

1. En additionnant les trois équations de (S), on obtient le résultat directement par factorisation.
2. Le triplet $(1,1,1)$ donne $u + v + w = (a+b+c, a+b+c, a+b+c) = (0,0,0)$. Famille liée.
3. En simplifiant par $(a+b+c)$, on a $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3$. Injecté dans le système, le déterminant du petit système 2×2 donne l'identité remarquable : $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$, donc $a = b = c$.
4. C'est une base si et seulement si $a + b + c \neq 0$ et les trois réels ne sont pas tous égaux.