

Probabilités sur un univers dénombrable

1 Espace probabilisé dénombrable

1.1 Ensemble dénombrable

Définition 1 : Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable s'il existe une bijection de E dans \mathbb{N} .

■ **Exemple 1 :** Les ensembles \mathbb{N} et \mathbb{Q} sont dénombrables.

Les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et \mathbb{R} ne sont pas dénombrables.

Dans toute la suite de ce chapitre, Ω désignera l'univers, fini ou infini, d'une expérience aléatoire et I désignera un ensemble fini ou dénombrable non vide.

1.2 Opérations sur les ensembles

Avant toute chose, prolongeons la notion d'union et d'intersection d'une famille finie d'ensembles (ou d'événements).

Définition 2 : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'ensembles.

- On note $\bigcup_{i \in I} A_i$ l'événement $\{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I, \omega \in A_i\}$;
- On note $\bigcap_{i \in I} A_i$ l'événement $\{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I, \omega \in A_i\}$;

Lorsque $I = \mathbb{N}$, on notera ces ensembles $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$ et $\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i$.

■ **Exemple 2 :** On a $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \{i\}$.

Propriété 1 : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'ensembles. Soit B un ensemble. Alors

$$B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i) \quad \text{et} \quad B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

$$B \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i) \quad \text{et} \quad B \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cap A_i)$$

1.3 Ensemble d'événements

Lorsque l'ensemble Ω est trop grand, l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ l'est d'autant plus. Il devient alors difficile de définir une probabilité en vérifiant uniquement les propriétés précédentes sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ entier. On peut alors choisir de se restreindre à un ensemble plus petit.

Définition 3 : Soit \mathcal{A} un ensemble inclus dans $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que (Ω, \mathcal{A}) est un espace probabilisable si :

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$;
- \mathcal{A} est stable par union dénombrable : $(\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Les éléments de \mathcal{A} sont alors appelés les **événements**.

L'ensemble \mathcal{A} ainsi défini est ce que l'on appelle une tribu... mais ce terme n'est pas au programme.

■ **Exemple 3 :** Si l'on pose $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$, alors (Ω, \mathcal{A}) est un espace probabilisable.

■ **Exemple 4 :** Si l'on pose $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors (Ω, \mathcal{A}) est un espace probabilisable.

Propriété 2 : Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Alors :

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- \mathcal{A} est stable par intersection dénombrable : $(\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Il faut donc retenir que, lorsque l'on a un espace probabilisable, l'ensemble des événements est alors stable par passage au complémentaire, union et intersection dénombrable.

Propriété 3 : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements d'un espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) . Alors

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i.$$

1.4 Système complet d'événements

Définition 4 : Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements.

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** lorsque :

- Ces événements sont tous non vides ;
- Ces événements sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire :

$$\forall i, j \in I^2, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset).$$

- Leur union forme l'univers entier : $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

■ **Exemple 5 :** Si A est un événement d'une expérience aléatoire, alors (A, \bar{A}) est un système complet d'événements. On a en effet $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$.

■ **Exemple 6 :** On considère $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \llbracket 10n; 10n + 9 \rrbracket$. (on a $A_0 = \llbracket 0; 9 \rrbracket$, $A_1 = \llbracket 10; 19 \rrbracket$, $A_2 = \llbracket 20; 29 \rrbracket$, ...).

La famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

■ **Exemple 7** : On lance une pièce une infinité de fois et on regarde de quel côté cette pièce tombe à chaque lancer.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'événement : " on obtient Pile pour la première fois au k -ième lancer ".

La famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas un système complet d'événement ! En effet, cette famille ne contient pas le cas où l'on n'obtient jamais le côté Pile.

2 Probabilité sur un univers dénombrable

Lorsque l'univers d'une expérience aléatoire était fini, nous définissions une probabilité comme une application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- pour tous événements incompatibles A et B , on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Par une récurrence simple, on pouvait alors montrer que pour toute famille d'événements $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ deux à deux disjoints, on avait $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

Toutefois, cette simple définition ne nous permet pas de généraliser ce calcul à une famille infinie d'événements. Il nous est donc essentiel de la prolonger.

2.1 Probabilité sur un univers dénombrable

Définition 5 : Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

Une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- pour toute famille dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles, la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ converge et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé**.

Il ne suffit plus ici d'avoir l'additivité de la probabilité pour deux événements incompatibles : il faut aussi qu'elle soit vraie pour toute famille dénombrable d'événements. La définition que nous voyons ici est une généralisation de celle vue pour les probabilités sur un univers fini. Nous avons d'ailleurs toujours la proposition suivante vérifiée.

Propriété 4 : Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille finie d'événements deux à deux incompatibles.

Alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

Démonstration 1 : Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $B_i = \begin{cases} A_i & \text{si } i \leq n \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$.

On a alors $\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i = \bigcup_{i=0}^n A_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{+\infty} \emptyset = \bigcup_{i=0}^n A_i$. Ainsi, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(A_i)$. \square

Propriété 5 : On suppose ici que $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $A = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \{\omega_i\}$.

$$\text{Alors } \mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Autrement dit, pour calculer la probabilité d'un événement, il suffit de calculer la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.



Méthode 1 : On se donne une application \mathbb{P} qui, à tout singleton $\{n\}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ associe un nombre $\mathbb{P}(\{n\})$.

Pour montrer que l'on définit bien une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, il suffit de montrer que $\sum \mathbb{P}(\{n\})$ converge

et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$.

■ **Exemple 8 :** Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Pour tout entier naturel n , on a alors $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or, puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge.

Ainsi, $\sum \mathbb{P}(\{n\})$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

Finalement, \mathbb{P} définit bien une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

■ **Exemple 9 :** Soit α un réel. Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\alpha 2^n}{n!}$.

Pour quelle valeur de α définit-on une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

On sait que la série de terme général $\frac{2^n}{n!}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$.

Ainsi, $\sum \mathbb{P}(\{n\})$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \alpha e^2$.

Ainsi, \mathbb{P} définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ si et seulement si $\alpha = e^{-2}$.



Méthode 2 : On se donne une application \mathbb{P} qui, à tout singleton $\{n\}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ associe un nombre $\mathbb{P}(\{n\})$.

On suppose que \mathbb{P} est une probabilité.

Pour calculer la probabilité d'un événement A , on calcule la somme $\sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Remarque : puisque l'on est dans le cadre d'une probabilité, la série obtenue est automatiquement convergente et la somme est donc bien définie.

■ **Exemple 10** : Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$. On a montré que l'on définit bien une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ainsi.

On considère l'événement P : « le nombre obtenu est pair ».

On a alors $P = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \{2i\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(P) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{2i\})$.

Or, pour tout entier naturel i , on a $\mathbb{P}(\{2i\}) = \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^i$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

2.2 Propriétés des probabilités

Propriété 6 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Démonstration 2 : En effet, $\Omega \in \mathcal{A}$ et puisque \mathcal{A} est stable par complémentaire, on a également $\overline{\Omega} \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Par ailleurs, Ω et \emptyset sont incompatibles. Ainsi, $\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = 1 + \mathbb{P}(\emptyset)$.

Or, $\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. □

Propriété 7 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient A et B deux événements. Alors,

- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

2.3 Probabilité sur un système complet d'événements

Propriété 8 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements.

Alors $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ converge et $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Démonstration 3 : Puisque les A_i sont deux à deux disjoints, on a

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

□

On retiendra notamment le cas particulier suivant

Propriété 9 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors pour tout événement A , on a

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Démonstration 4 : Il suffit de remarquer que $(A; \overline{A})$ est un système complet d'événements. □

2.4 Indépendance d'événements

Définition 6 : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements.

Les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants lorsque, pour tout sous-ensemble **fini** $J \subset I$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

Attention : le programme ne mentionne rien concernant l'intersection d'une famille infinie d'événements, même indépendants.

On peut en réalité montrer que pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right)$.

2.5 Événements négligeables et presque sûrs

Définition 7 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$.

- On dit que A est négligeable si $\mathbb{P}(A) = 0$;
- On dit que A est presque sûr si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Attention : ce n'est pas parce que $\mathbb{P}(A) = 0$ que l'on a $A = \emptyset$. De même, ce n'est pas parce que $\mathbb{P}(A) = 1$ que l'on a forcément $A = \Omega$.

■ **Exemple 11 :** On lance indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n , on note P_n l'événement : "obtenir pour la première fois PILE au lancer n " et F l'événement "ne jamais obtenir PILE". On suppose que les résultats pour tous les lancer sont indépendants.

Or, $(F, (P_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ est un système complet d'événements. On a donc

$$\mathbb{P}(F) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(P_n) = 1.$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n , on note S_n l'événement "obtenir PILE au lancer n ".

Soit donc n un entier naturel non nul. On a $P_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{S}_i\right) \cap S_n$.

Puisque les lancers sont indépendants, on a alors

$$\mathbb{P}(P_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\bar{S}_i) \times \mathbb{P}(S_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(P_n) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(P_n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Il en vient que $\mathbb{P}(F) + 1 = 1$ et donc $\mathbb{P}(F) = 0$. L'événement F est donc négligeable.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Notion de probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle peut évidemment être étendue naturellement à un univers dénombrable.

Propriété 10 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un événement telle que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

L'application $\mathbb{P}_A : \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow [0; 1] \\ B & \longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{cases}$ est une probabilité.

Démonstration 5 : Vérifions que cette application vérifie bien la définition d'une probabilité.

D'abord, $A \cap \Omega = A$. Ainsi, $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.

Soit $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. On a alors

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i\right)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (B_i \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_i).$$

□

Définition 8 : Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , la quantité

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Propriété 11 : Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On a

- $0 \leq \mathbb{P}_A(B) \leq 1$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1$

Démonstration 6 : Cela vient directement du fait que \mathbb{P}_A est une probabilité. Elle vérifie donc toutes les propriétés déjà énoncées. □

3.2 Formule des probabilités composées

Théorème 7 — Formule des probabilités composées : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A_1, \dots, A_n des événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$. alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Dans le cas où $n = 2$, on retrouve la relation $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$.

La démonstration de ce résultat se fait par récurrence sur n .

■ **Exemple 12 :** Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules de cette urne. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note R_i l'événement : "la i -ème boule tirée est rouge". On cherche la probabilité d'obtenir 3 boules rouges, c'est-à-dire $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$.

D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3)$$

- Au premier tirage, on a 3 boules rouges sur 5, donc $\mathbb{P}(R_1) = \frac{3}{5}$.
- Sachant R_1 réalisé, il ne reste plus que 2 boules rouges sur 4 dans l'urne, donc $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- Sachant $R_1 \cap R_2$ réalisé, il ne reste plus qu'une seule boule rouge sur 3 dans l'urne.
Ainsi, $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{1}{3}$.

$$\text{Finalement, } \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}.$$

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 8 — Formule des probabilités totales : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit B un événement et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

De plus, si pour tout $i \in I$, on a $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i)$$

On remarquera notamment le cas particulier du système complet d'événements (A, \bar{A}) .

On a alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$.

■ **Exemple 13 :** On dispose d'une infinité d'urnes numérotées $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'urne U_n contient 1 boule rouge et $3^n - 1$ boules noires (soit 3^n boules au total).

On choisit une urne de manière aléatoire de sorte que la probabilité de choisir l'urne U_n soit égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On tire ensuite une boule dans l'urne choisie.

On cherche la probabilité de l'événement R : "obtenir une boule rouge".

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "l'urne U_n est choisie". Par hypothèse, $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Puisque l'on choisit exactement une urne, la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ constitue un système complet d'événements. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(A_n) \neq 0$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(R)$$

Or, sachant l'événement A_n réalisé, on tire une boule parmi 3^n boules (dont une seule est rouge). Ainsi,

$\mathbb{P}_{A_n}(R) = \frac{1}{3^n}$. On obtient donc le calcul de la somme d'une série géométrique :

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Puisque $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$, la série converge (ce qui assure l'existence de la probabilité) et on a :

$$\mathbb{P}(R) = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}.$$

3.4 Formules de Bayes

Théorème 9 — Formule de Bayes : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Démonstration 10 : On a en effet

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

□

Théorème 11 — Formule de Bayes généralisée : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements tel que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$.

Soit B un événement de probabilité non nulle.

Alors pour tout $k \in I$:

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

■ **Exemple 14 :** Reprenons l'expérience précédente avec l'infinité d'urnes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Rappelons que la probabilité de choisir l'urne U_n est $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et que la probabilité de tirer une boule rouge sachant l'urne U_n choisie est $\mathbb{P}_{A_n}(R) = \frac{1}{3^n}$.

Supposons que le joueur a effectué le tirage et annonce qu'il a obtenu une boule rouge. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de la toute première urne (U_1) ?

On cherche ici à calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_R(A_1)$.

Puisque la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ constitue un système complet d'événements et que $\mathbb{P}(R) > 0$, on peut appliquer

la formule de Bayes généralisée :

$$\mathbb{P}_R(A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(R)}{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(R)}$$

Le dénominateur correspond à la probabilité totale $\mathbb{P}(R)$. D'après les calculs effectués dans l'exemple précédent, nous savons déjà que $\mathbb{P}(R) = \frac{1}{5}$.

Il ne reste plus qu'à calculer le numérateur (qui correspond à l'intersection $A_1 \cap R$) :

$$\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(R) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1}{3^1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Finalement, en remplaçant dans la formule :

$$\mathbb{P}_R(A_1) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$$