Probabilités sur un univers infini

Pour chaque exercice, on se place dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

▶ Exercice 1 Définir une probabilité – Voir le corrigé

On considère l'univers $\Omega = \mathbb{N}^*$ et on note $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

Soit c un réel. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = c\dfrac{2^{n-1}}{3^n}$.

1. Déterminer la valeur du réel c pour que l'application $\mathbb{P}$ définie par $\mathbb{P}(\{n\}) = u_n$ définisse une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. Dans toute la suite, on suppose que c prend la valeur trouvée à la question précédente.
   (a) Calculer la probabilité de l'événement P : « Le résultat est un nombre pair ».
   (b) Calculer la probabilité de l'événement M : « Le résultat est un multiple de 3 ».

▶ Exercice 2 Le jeu alterné à l'infini – Voir le corrigé

Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de hasard. Ils lancent à tour de rôle une pièce de monnaie truquée qui donne « Pile » avec une probabilité $p \in]0,1[$ et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$. Le joueur A commence. Le premier à obtenir « Pile » gagne la partie et le jeu s'arrête.

Pour tout entier naturel non nul k, on note A_k l'événement : « A gagne la partie lors de son k-ième lancer » et B_k l'événement « B gagne la partie lors de son k-ième lancer ».

On note également A l'événement « Le joueur A gagne la partie », B l'événement « Le joueur B gagne la partie », et N l'événement « La partie ne s'arrête jamais ».

1. Exprimer les événements A et B en fonction des événements A_k et B_k.
2. Calculer $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(B_1)$.
3. Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(B_k)$ en fonction de k, p et q.
4. En déduire la probabilité que le joueur A gagne la partie, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A)$.
5. Calculer $\mathbb{P}(B)$. En déduire $\mathbb{P}(N)$.
6. Pour quelle valeur de p le jeu est-il équitable ?

▶ Exercice 3 Trafic sur un serveur et série exponentielle – Voir le corrigé

Un serveur informatique reçoit des requêtes de connexion.
Pour tout entier naturel n, on note E_n l'événement : « le serveur reçoit exactement n requêtes en une minute ».

On suppose qu'il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{P}(E_n) = c\dfrac{3^n}{n!}$.

1. Déterminer la valeur du réel c pour que l'on définisse bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$..

Dans toute la suite, on suppose que c prend la valeur obtenue à la question précédente.

2. Calculer la probabilité de l'événement A : « le serveur reçoit au moins deux requêtes ».
3. Chaque requête reçue a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être traitée avec succès par le serveur, et ce de manière indépendante des autres requêtes.
   Soit S l'événement : « toutes les requêtes reçues lors de cette minute sont traitées avec succès ».
   (a) Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que $\mathbb{P}_{E_n}(S) = p^n$.
   Par convention, si le serveur ne reçoit aucune requête, on considère que l'événement S *est réalisé de façon certaine, c'est-à-dire que* $\mathbb{P}_{E_0}(S) = 1$.
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(S)$.

► Exercice 4 Campagne publicitaire et série dérivée – Voir le corrigé

Une entreprise lance une campagne promotionnelle et envoie un nombre aléatoire d'emails à ses clients. Pour un client donné, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement : « Le client reçoit exactement n emails ».

On admet que la probabilité de cet événement est donnée par $\mathbb{P}(E_n) = \dfrac{n}{2^{n+1}}$.

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. On suppose que le client ouvre chaque email reçu avec une probabilité $p = \dfrac{1}{3}$, et ce de manière indépendante pour chaque email.
   On s'intéresse à l'événement Z : « Le client n'ouvre aucun des emails reçus ».
   (a) Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{E_n}(Z)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer la valeur de $\mathbb{P}(Z)$.
3. On constate en fin de journée que le client n'a ouvert aucun email (l'événement Z est donc réalisé). À l'aide de la formule de Bayes, calculer la probabilité qu'il ait en réalité reçu exactement 2 emails.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Un utilisateur reçoit chaque jour un certain nombre de courriers indésirables (spams).

Pour tout entier naturel n, on note R_n l'événement : « L'utilisateur reçoit exactement n spams au cours de la journée ».

On admet que la probabilité de cet événement est donnée par : $\mathbb{P}(R_n) = e^{-2}\dfrac{2^n}{n!}$.

L'utilisateur dispose d'un logiciel anti-spam.
Ce filtre réussit à bloquer chaque spam avec une probabilité $p \in]0,1[$, et ce de manière indépendante pour chaque message.

On s'intéresse à l'événement V : « L'utilisateur ne voit aucun spam dans sa boîte de réception principale » (c'est-à-dire que tous les spams reçus, s'il y en a eu, ont été bloqués par le filtre).

1. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{R_n}(V)$.
   Par convention, si l'utilisateur ne reçoit aucun spam, la boîte de réception est évidemment vierge de spams, donc $\mathbb{P}_{R_0}(V) = 1$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(V) = e^{-2(1-p)}$.
3. On suppose aujourd'hui que la boîte de réception de l'utilisateur est vierge de tout spam.
   Déterminer la probabilité $\mathbb{P}_V(R_n)$ que l'utilisateur ait en réalité reçu exactement n spams, en fonction de n et de p.

► Exercice 6 INSEEC 2002 + Python – Voir le corrigé

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

À chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12 ; il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- il mise sur le chiffre 1 à la première partie,
- s'il perd à la n^e partie, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la n^e partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la n^e partie ».

(a) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$

(b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

2. Soit $k \in [\![1,n]\!]$, on note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la k^e partie ».
   (a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(B_n)$.
   (b) Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$, calculer $P(B_k)$.
   (c) En déduire la probabilité q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.
3. (a) **Informatique.** On souhaite écrire une fonction simulant la stratégie du joueur et renvoyant `True` s'il gagne sa n^e partie, et `False` sinon.
   Compléter la fonction Python suivante :

```python
import numpy.random as rd

def simul_partie(n):
    # Initialisation pour la 1ere partie : on mise sur 1 numero
    nb_mises = 1
    gain = False

    for k in range(...) :
        # Tirage d'un numero entre 1 et 12
        resultat_roue = rd.randint(1, 13)

        if resultat_roue <= nb_mises:
            gain = True
            nb_mises = ...  # Mise sur 3 numeros a la prochaine
        else:
            gain = ...
            nb_mises = ...  # Mise sur 2 numeros a la prochaine

    return gain
```

► Exercice 7 Apparition d'un motif et suite récurrente d'ordre 2 – Voir le corrigé

On lance indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée. On s'intéresse à l'apparition de deux « Pile » consécutifs. Pour tout entier naturel non nul n, on note A_n l'événement : « Les n premiers lancers ne comportent pas deux Pile consécutifs ».

On pose $u_n = \mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \geq 1$, et l'on convient pour la formule que $u_0 = 1$.

1. **Informatique.** On souhaite simuler l'expérience.
   Compléter le script Python suivant :

```python
import numpy.random as rd

def simul_motif():
    lancers = 0
    consecutifs = 0
    while consecutifs < ... :
        piece = rd.randint(0, 2) # 1 pour Pile, 0 pour Face
        lancers = ...
        if piece == 1:
            consecutifs = ...
        else:
            consecutifs = 0
    return lancers
```

2. Expliciter les issues réalisant A_1, A_2 et A_3. En déduire les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
3. Pour tout entier $k \geq 1$, on note P_k (resp. F_k) l'événement « Obtenir Pile (resp. Face) au k-ième lancer ». Justifier que la famille d'événements $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ constitue un système complet d'événements.
4. Soit $n \geq 3$.
   (a) Que valent les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{P_1 \cap P_2}(A_n)$, $\mathbb{P}_{F_1}(A_n)$ et $\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(A_n)$?
   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que :

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2}$$

5. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
6. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
7. On note A l'événement « On n'obtient jamais deux Pile consécutifs lors de cette infinité de lancers ».
   (a) Justifier que $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Vérifier que les événements B_n sont deux à deux incompatibles, et montrer que :

$$A_1 = A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right)$$

   (c) Exprimer $\mathbb{P}(B_n)$ en fonction de u_n et u_{n+1}.
   (d) Montrer que $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A) + u_1$.
   (e) Conclure quant à la probabilité de l'événement A.

► Exercice 8 Choix d'une pièce et formule de Bayes – Voir le corrigé

Une boîte contient deux pièces de monnaie. La pièce A est parfaitement équilibrée. La pièce B est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir « Face » est de $\frac{3}{4}$.

On choisit une pièce au hasard dans la boîte (de manière équiprobable) et on effectue avec celle-ci une suite infinie de lancers.

On note E_A l'événement « La pièce A a été choisie », E_B l'événement « La pièce B a été choisie », et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n l'événement « On obtient Face lors des n premiers lancers ».

1. Donner sans justification les probabilités $\mathbb{P}_{E_A}(F_n)$ et $\mathbb{P}_{E_B}(F_n)$ en fonction de n. *(On admet que les lancers successifs d'une même pièce sont indépendants).*
2. En déduire $\mathbb{P}(F_n)$.
3. Sachant que les n premiers lancers ont donné « Face », on note p_n la probabilité d'avoir choisi la pièce truquée B. Montrer que

$$p_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

4. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter concrètement ce résultat.